MT02-Fonctions d'une variable réelle

Chapitre 5 : Dérivation

Équipe de Mathématiques Appliquées

UTC

Printemps 2023

▽

Chapitre 5
Dérivation

5.1 Dérivée

5.1.1 Définition et exemples de dérivées

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3

Exemples :
Exemple B.1.1

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un intervalle ouvert et ε toute fonction numérique définie dans un voisinage de 0 et telle que : $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction définie sur Ω, soit $a \in \Omega$, f est **dérivable au point a** si la limite suivante existe :*

$$d = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{5.1.1}$$

*Dans ce cas le nombre d est appelé la **dérivée de f au point a** et on note :*

$$\boldsymbol{d = \frac{df}{dx}(a) = f'(a).}$$

*f est **dérivable sur** Ω si elle admet une dérivée en tout point de Ω.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 5.1.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit dérivable au point $a \in \Omega$ est qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tels que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ et , pour $a+h \in \Omega$, on puisse écrire*

$$f(a+h) = f(a) + hd + |h|\varepsilon(h). \tag{5.1.2}$$

Démonstration -

1. La condition est évidemment suffisante car en divisant (5.1.2) par $h \neq 0$ on obtient

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = d + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h).$$

Or

$$\left|\frac{|h|}{h}\varepsilon(h)\right| = |\varepsilon(h)|$$

qui tend vers 0 quand $h \to 0$. D'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = d,$$

et de plus $d = f'(a)$.

2. On note Ω' l'intervalle ouvert tel que $a+h \in \Omega \Leftrightarrow h \in \Omega'$. Pour montrer que la condition est nécessaire, introduisons la fonction ϕ définie sur $\Omega' \setminus \{0\}$ par :

$$\phi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Comme f est dérivable on a par définition $\lim_{h\to 0}\phi(h) = 0$, et

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\phi(h) \quad \text{pour } h \in \Omega'\setminus\{0\}.$$

Si l'on pose alors

$$\varepsilon(h) = \frac{h}{|h|}\phi(h) \quad \text{pour } h \neq 0 \ \text{ et } \varepsilon(0) = 0,$$

on a encore

$$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0,$$

de plus on peut écrire

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + |h|\varepsilon(h) \ \ \forall h \in \Omega'.$$

Corollaire 5.1.1. *Une fonction dérivable en a est continue en a.*

La démonstration est laissée en exercice ainsi que la recherche d'un contre-exemple qui montre que la réciproque est fausse.

On peut aussi définir la dérivabilité de f à droite au point a en prenant $h > 0$ dans la définition 5.1.1 ou dans 5.1.2.

Enfin la relation (5.1.2) est très importante car elle signifie que la fonction $\delta(h) = f(a+h) - f(a)$ peut être approchée par une fonction linéaire $h \mapsto f'(a)h$ en commettant une erreur qui tend vers 0 plus vite que $|h|$ (voir la figure (5.1.1)). Cette observation est à l'origine de ce qu'on appelle la **différentielle de f au point a**, notion difficile non abordée dans ce cours.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

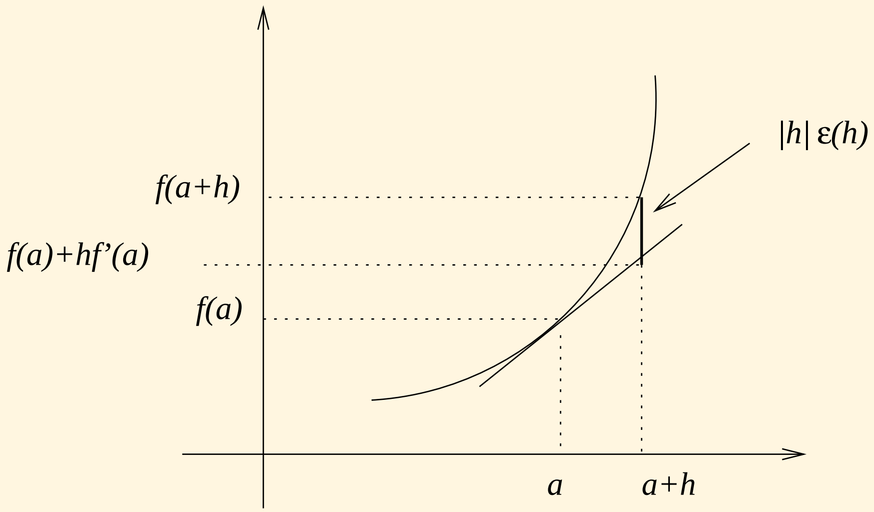

FIGURE 5.1.1 – Tangente et dérivée

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.1.2 Somme, produit, quotient de dérivées

Exercices :
Exercice A.1.4
Exercice A.1.5

Théorème 5.1.1. *Si f et g sont dérivables au point a alors*
- *(i)* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- *(ii)* $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- *(iii)* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- *(iv)* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ *(sous la condition $g(a) \neq 0$).*

Démonstration - Les deux premiers résultats sont démontrés en exercice. Regardons le produit

$$\frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = f(a+h)\frac{g(a+h)-g(a)}{h} \tag{5.1.3}$$

$$+ \quad g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{5.1.4}$$

et lorsque l'on fait tendre h vers 0 en utilisant les résultats sur les limites on obtient le résultat.

Démontrons (iv) dans le cas $f = 1$, à titre d'exemple (une fois démontrée (iii), ce cas donne (iv) en toute généralité !). On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} &= \frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)g(a)} && (5.1.5)\\
&= \frac{g(a)-[g(a)+hg'(a)+|h|\varepsilon(h)]}{g(a+h)g(a)} && (5.1.6)\\
&= \frac{-hg'(a)-|h|\varepsilon(h)}{g(a+h)g(a)}. && (5.1.7)
\end{aligned}$$

On obtient bien le résultat en divisant par h et en faisant tendre h vers 0.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.1.3 Composition des dérivées

Exercices :
Exercice A.1.6

Théorème 5.1.2. *Soient f et g deux fonctions telles que g est dérivable au point a et f est dérivable au point $g(a)$, alors la fonction $f \circ g$ est dérivable au point a et on a*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Démonstration - Utilisons la relation 5.1.2 pour la fonction g :

$$(f \circ g)(a+h) = f(g(a+h)) = f(g(a) + hg'(a) + |h|\varepsilon_1(h)). \tag{5.1.8}$$

Si l'on pose

$$l = g(a), \quad \delta = hg'(a) + |h|\varepsilon_1(h),$$

alors l'application de la relation 5.1.2 pour f donne :

$$f(l+\delta) = f(l) + \delta f'(l) + |\delta|\varepsilon_2(\delta).$$

Ce qui permet de réécrire (5.1.8) sous la forme

$$(f \circ g)(a+h) = f(g(a)) + f'(g(a))[hg'(a) + |h|\varepsilon_1(h)] + |\delta|\varepsilon_2(\delta)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

ou encore
$$(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)=f'(g(a))[hg'(a)+|h|\varepsilon_1(h)]+|\delta|\varepsilon_2(\delta),$$
soit aussi :
$$\frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h}=f'(g(a))\left[g'(a)+\frac{|h|}{h}\varepsilon_1(h)\right]+\frac{|\delta|}{h}\varepsilon_2(\delta). \tag{5.1.9}$$
On peut alors passer à la limite. On utilisera plusieurs fois le résultat bien connu : le produit d'une fonction bornée (par exemple $\dfrac{h}{|h|}$) par une fonction qui tend vers 0 est une fonction qui tend vers 0.
$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\varepsilon_1(h)=0,\ \text{donc}\ \lim_{h\to 0}\left(g'(a)+\frac{|h|}{h}\varepsilon_1(h)\right)=g'(a).$$
Donc
$$\lim_{h\to 0}\frac{|\delta|}{|h|}=\lim_{h\to 0}\left|g'(a)+\frac{|h|}{h}\varepsilon_1(h)\right|=|g'(a)|.$$

D'autre part quand h tend vers 0, δ tend vers 0 donc $\varepsilon_2(\delta)$ tend vers 0. On a donc
$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\varepsilon_2(\delta)=0.$$
Enfin on peut écrire :
$$\lim_{h\to 0}\frac{|\delta|}{h}\varepsilon_2(\delta)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{|\delta|}{|h|}\right)\lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|}{h}\varepsilon_2(\delta)\right)=0.$$
On obtient le résultat final :
$$(f\circ g)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(a+h)-(f\circ g)(a)}{h}=f'(g(a))g'(a).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.1.4 Extrema (minimum ou maximum)

Exercices :
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8

Définition 5.1.2.

1. *$x_m \in \Omega$ (resp. $x_M \in \Omega$) réalise un **minimum local** (resp. un **maximum local**) de f sur Ω s'il existe un $\alpha > 0$ tel que :*

$$\forall x \in \Omega \cap]x_m - \alpha, x_m + \alpha[\ \ (\text{resp. }]x_M - \alpha, x_M + \alpha[),$$
$$f(x_m) \leq f(x) \ \ (\text{resp. } f(x) \leq f(x_M)).$$

On dit alors que x_m (resp. x_M) est un point minimum (resp. maximum) (local) de f.

2. *x_m (resp. x_M) est un point **minimum global** (resp. **maximum global**) de f si :*

$$\forall x \in \Omega, \ f(x_m) \leq f(x) \ (\text{resp. } f(x) \leq f(x_M)).$$

De manière générale $\bar{x}$ est un point **extremum** de f si c'est un point minimum ou maximum.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 5.1.2. *Soit f une fonction dérivable sur $\Omega = (a, b)$ et $\bar{x}$ un point extremum local de f sur Ω. Alors,* si $\bar{x} \in]a, b[$ *(i.e. $\bar{x}$ est intérieur à Ω), on a $f'(\bar{x}) = 0$.*

Démonstration - Démontrons le résultat si $\bar{x}$ est un point minimum, la démonstration étant analogue si $\bar{x}$ est un maximum.

Comme $\bar{x}$ est intérieur à Ω, il existe $\alpha > 0$ tel que $]\bar{x} - \alpha, \bar{x} + \alpha[\subset \Omega$ et donc, en particulier :

$$\forall h \text{ tel que } |h| < \alpha, \; f(\bar{x}) \leq f(\bar{x} + h). \tag{5.1.10}$$

Prenons $0 < h < \alpha$, alors il résulte de (5.1.10) que $\dfrac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} \geq 0$
et donc, en passant à la limite quand $h \to 0$ $f'(\bar{x}) \geq 0$.
Prenons maintenant $-\alpha < h < 0$, alors on déduit de (5.1.10) que :

$$\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} \leq 0,$$

d'où en prenant la limite $f'(\bar{x}) \leq 0$.
Il résulte des deux inégalités que $f'(\bar{x}) = 0$.

Extrema (minimum ou maximum)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.1.5 Dérivées d'ordre supérieur

Documents :
Document C.1.1

Définition 5.1.3. *Soit f une fonction dérivable dans Ω et $a \in \Omega$. On dit que f est **deux fois dérivable** en a si la fonction dérivée $x \mapsto f'(x)$ est elle-même dérivable en ce point. On appelle alors **dérivée seconde** de f au point a la quantité $(f')'(a)$. On écrit également $\boldsymbol{f''(a)}$ ou $\boldsymbol{\dfrac{d^2 f}{dx^2}(a)}$ cette dérivée seconde de f en a.*
*On dit qu'une fonction f est **deux fois dérivable sur** Ω si elle est deux fois dérivable en tout point de Ω.*

*D'une façon plus générale on définit la **dérivée d'ordre n** d'une fonction f par*

$$\boldsymbol{\frac{d^n f}{dx^n}(a) = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right](a).}$$

Remarquons qu'une fonction dérivable est toujours continue, mais si sa (fonction) dérivée est elle-même continue alors on dit qu'elle est **continûment dérivable**.
D'une façon plus générale, on dit que la fonction f est ***n* fois continûment dérivable** sur Ω si elle est dérivable jusqu'à l'ordre n et que sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue.

Proposition 5.1.3. - Formule de Leibniz -
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables, alors on a la formule suivante : .

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)} g^{(n-k)}$$

avec

$$(f)^0 = f, \quad et \quad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

La démonstration simple mais technique est donnée en document

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.2 La formule des accroissements finis

5.2.1 Formule des accroissements finis

Exercices :
Exercice A.1.9
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11

On suppose que $a < b$.

Théorème 5.2.1. - Théorème de Rolle -
Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration - Si f est constante sur $[a,b]$, alors $f' = 0$ sur $[a,b]$ et le théorème est immédiat. Si f n'est pas constante elle admet un minimum m et un maximum M dont l'un au moins est différent de $f(a)$, donc atteint en un point c intérieur à (a,b), il résulte alors de la condition nécessaire sur les extrema que $f'(c) = 0$.

Théorème 5.2.2. *(***Formule des accroissements finis***)*
Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c). \tag{5.2.1}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Posons

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

On a évidemment

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de Rolle à φ qui en vérifie manifestement les hypothèses, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = 0, \text{ soit } f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

5.2.2 Caractérisation de la monotonie

Exercices :
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Théorème 5.2.3. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, dérivable sur I. Alors f est monotone croissante sur I, si et seulement si :*

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0.$$

Démonstration -

1. La monotonie implique que :

$$\forall c \in I, \forall h \geq 0, \left\{ c+h \in I \quad \Rightarrow \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0 \right\}$$

   et donc par passage à la limite quand $h \to 0$ on en déduit $f'(c) \geq 0$.

2. Réciproquement, soient $x, x' \in I$ avec $x < x'$. Par application du théorème des accroissements finis 5.2.2 sur $[x, x']$, il existe $d \in]x, x'[\subset I$ tel que

$$f(x') - f(x) = (x' - x) f'(d).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Comme $f'(d) \geq 0$, on obtient $f(x') \geq f(x)$, ce qui montre bien que f est monotone croissante sur I.

Cette démonstration montre aussi que si $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$ alors, f est strictement monotone croissante sur I. Par contre, cette condition n'est pas nécessaire pour que f soit strictement monotone croissante (voir exercice A.1.12). D'autre part une fonction peut être strictement monotone sans être dérivable ni même continue !

Corollaire 5.2.1. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, dérivable sur I,*

1. *f est monotone décroissante sur I si et seulement si :*

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leq 0,$$

2. *f est constante sur I, si et seulement si :*

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Démonstration -

1. Il suffit de remplacer f par $-f$ et d'appliquer le théorème précédent.
2. Il suffit de remarquer qu'une fonction f est constante si et seulement si f est simultanément monotone croissante et monotone décroissante, puis d'appliquer les résultats précédents.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.2.3 Application au calcul d'erreur

Exercices :
Exercice A.1.14

Le problème de base du calcul d'erreur est le suivant : Si on approche la valeur de $f(a+\delta)$ par $f(a)$, quelle erreur (au maximum) commet-on ? Une réponse est donnée par le théorème des accroissements finis. En effet, on peut écrire :

$$f(a+\delta)-f(a)=\delta f'(c) \quad \text{où} \quad c\in]a,a+\delta[\quad \text{si} \quad \delta>0, \quad \text{ou } c\in]a+\delta,a[\quad \text{si} \quad \delta<0.$$

Si on note

M_1 un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle $[a,a+|\delta|]$,
M_2 un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle $[a-|\delta|,a]$,
M un majorant de $|f'|$ sur l'intervalle $[a-|\delta|,a+|\delta|]$,

alors on a les majorations suivantes

$$\begin{array}{ll} |f(a+\delta)-f(a)|\le M_1\delta, & \text{si } \delta\ge 0,\\ |f(a+\delta)-f(a)|\le M_2|\delta|, & \text{si } \delta\le 0,\\ |f(a+\delta)-f(a)|\le M|\delta|, & \text{si on ne connaî t pas le signe de } \delta. \end{array}$$

Par exemple, si on approche la valeur de $\cos 29°$ par celle de $\cos 30°$, quelle erreur commet-on ? Posons $a=\frac{\pi}{6}$ et $\delta=\frac{\pi}{180}$, alors

$$0\le\cos(a-\delta)-\cos(a)\le M\delta$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où M est un majorant de $\sin x$ sur l'intervalle $[a-\delta, a]$. On peut évidemment prendre $M=1$, mais si on veut améliorer la majoration on prendra

$$M = \sin a = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

puisque la fonction $\sin x$ est croissante sur l'intervalle $[a-\delta, a]$. D'où l'encadrement

$$0 < \cos 29° - \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{360} \quad (< 0.01).$$

On vérifie effectivement que l'erreur est de l'ordre de 0.0086.

5.2.4 Fonctions convexes

Exercices :
Exercice A.1.15

Documents :
Document C.1.2

De manière "visuelle" une fonction est convexe si le graphe est "en dessous" de la corde.

Définition 5.2.1. *On dit que la fonction f est **convexe** sur l'intervalle Ω si*

$$\begin{cases} \forall x, y \in \Omega \quad \text{et} \quad \theta \quad \text{tel que} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \text{on a :} \\ f(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y). \end{cases}$$

*On dit que la fonction f est **strictement convexe** si*

$$\begin{cases} \forall x, y \in \Omega, \ x \neq y \quad \text{et} \quad \theta \quad \text{tel que} \quad 0 < \theta < 1 \quad \text{on a :} \\ f(\theta x + (1-\theta) y) < \theta f(x) + (1-\theta) f(y). \end{cases}$$

On a une définition correspondante pour la **concavité** en changeant le sens des inégalités.

La proposition suivante caractérise la convexité d'une fonction lorsque celle-ci est deux fois dérivable. Mais il existe des fonctions non dérivables partout et qui sont convexes!

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 5.2.1. *Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur Ω ouvert, alors f est une fonction convexe sur Ω si et seulement si $\forall x \in \Omega,\ f''(x) \geq 0$. De plus si $\forall x \in \Omega,\ f''(x) > 0$, alors elle est strictement convexe sur Ω.*

Démonstration -

1. Soit f une fonction convexe, on a démontré dans l'exercice A.1.11 que si
   $x \in \Omega$ et $h > 0$ tel que $x \pm h \in \Omega$,
   alors, il existe un $\theta \in]0,1[$ et un $c \in]x-\theta h, x+\theta h[$ tels que :
   $$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{2\theta h^2} = f''(c). \tag{5.2.2}$$
   Puisque f est convexe et que $x = \frac{1}{2}(x+h)+\frac{1}{2}(x-h)$, on a
   $$f(x) \leq \frac{1}{2}f(x+h)+\frac{1}{2}f(x-h)$$
   d'où :
   $$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{2\theta h^2} \geq 0$$
   et le passage à la limite $h \to 0$ donne $f''(x) \geq 0$.
2. Réciproquement, soit f une fonction vérifiant $\forall x \in \Omega,\ f''(x) \geq 0$. montrons que f est convexe c'est-à-dire que, quels que soient a et b deux points de Ω, on a
   $$\forall t \in [0,1], \quad f(ta+(1-t)b) \leq tf(a)+(1-t)f(b).$$

Ce qui est équivalent à prouver que la fonction

$$\varphi(t) = f(t(a-b)+b) - tf(a) - (1-t)f(b)$$

vérifie

$$\forall t \in [0,1], \quad \varphi(t) \leq 0.$$

Remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi(1) &= 0, \qquad (5.2.3)\\ \varphi'(t) &= (a-b)f'((t(a-b)+b)) - f(a) + f(b),\\ \varphi''(t) &= (a-b)^2 f''((t(a-b)+b)) \geq 0, \end{aligned}$$

puisque, par hypothèse, $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [a,b]$. Il résulte du théorème de Rolle qu'il existe $\tau \in]0,1[$ tel que

$$\varphi'(\tau) = 0$$

et, comme $\varphi''(t) \geq 0$, on en déduit que la fonction $\varphi'(t)$ est monotone croissante ce qui conduit au tableau de variations suivant :

x	0		τ		1
φ'		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$\varphi(\tau)$	$\nearrow$	0

ce qui montre que $\varphi(t) \leq 0$, $\forall t \in [0,1]$.

Vous verrez en document un lien important entre convexité et extrema.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.3 Les fonctions réciproques

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.3.1 Dérivée des fonctions réciproques

Exercices :
Exercice A.1.16

Nous avons démontré dans le chapitre 2, paragraphe "Application réciproque" qu'une fonction bijective admet une application réciproque. On a vu aussi dans le chapitre 4, paragraphe "Fonctions strictement monotones" que la fonction réciproque est continue. On étudie ici sa dérivabilité.

On peut démontrer que si la fonction est continue et strictement monotone, l'image d'un intervalle ouvert Ω est un intervalle ouvert Ω', ces intervalles ne sont nécessairement bornés. Par exemple si $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $\Omega =]0,1[$ on a $\Omega' =]1,+\infty[$, pour $\Omega =]1,+\infty[$, on a $\Omega' =]0,1[$.

Théorème 5.3.1. *Soit f une fonction continue, dérivable, strictement monotone sur l'intervalle ouvert Ω, on note $\Omega' = f(\Omega)$, on suppose que*

$$\forall x \in \Omega, \quad f'(x) \neq 0,$$

alors f^{-1} est définie, continue et dérivable et de plus on a

$$\forall y_0 \in \Omega', \quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}, \tag{5.3.1}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration - Remarquons tout d'abord que f^{-1} existe et est continue comme on l'a vu au chapitre 4. Etant donné $y_0 \in \Omega'$, pour tout $y \in \Omega'$, $y \neq y_0$ définissons le rapport

$$q = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0},$$

Comme f est une bijection il existe donc $x \in \Omega, x_0 \in \Omega$ tels que

$$x = f^{-1}(y), \quad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

avec $x \neq x_0$ et donc

$$q = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Puisque f^{-1} est continue quand y tend vers y_0, alors x tend vers x_0.

De plus

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \neq 0$$

donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

En regroupant tous ces résultats, on obtient

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En traçant dans un même système d'axes orthonormés les courbes représentatives (ou graphes) des fonctions f et $g = f^{-1}$ on remarque tout d'abord que ces courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$. Les tangentes de ces courbes aux points $(x_0, f(x_0))$ et $(f(x_0), x_0)$ respectivement sont également symétriques et leurs pentes respectives

$$m = f'(x_0) \quad \text{et} \quad m' = g'(y_0)$$

vérifient donc

$$mm' = 1,$$

ce qui traduit la relation (5.3.1).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.3.2 Fonctions circulaires réciproques

Exercices :
Exercice A.1.17
Exercice A.1.18

On a vu que la fonction $f(x) = \sin x$ est strictement monotone croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs dans $[-1,+1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, définie et strictement croissante sur $[-1,+1]$. On l'appelle **Arc sinus** et on la note $\operatorname{Arc}\sin$. Nous avons donc l'équivalence :

$$(g(y) = \operatorname{Arc}\sin y) \iff \left\{\left(g(y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]\right) \textbf{ et } (\sin g(y) = y)\right\} \tag{5.3.2}$$

Soit $y_0 \in]-1,+1[$, il existe donc $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$x_0 = \operatorname{Arc}\sin y_0, \qquad y_0 = \sin x_0.$$

Le théorème précédent nous indique que

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arc}\sin y_0)}.$$

Mais pratiquement ce résultat est difficile à manipuler car il est souhaitable d'obtenir le résultat en fonction de y_0. Or comme :

$$\left(x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\right) \Rightarrow (\cos x_0 > 0),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

nous pouvons écrire :

$$\cos x_0 = \sqrt{1-\sin^2(x_0)} = \sqrt{1-y_0^2},$$

d'où le résultat :

$$\forall y_0 \in]-1,+1[, \quad \frac{d\text{Arc}\sin}{dy}(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}. \tag{5.3.3}$$

On définit de la même manière, une fonction **Arc cosinus**, que l'on note $\text{Arc}\cos$, les formules correspondant à (5.3.2, 5.3.3) sont :

$$(g(y) = \text{Arc}\cos y) \iff \{(g(y) \in [0,\pi]) \textbf{ et } (\cos g(y) = y)\} \tag{5.3.4}$$

$$\forall y_0 \in]-1,+1[, \quad \frac{d\text{Arc}\cos}{dy}(y_0) = \frac{-1}{\sqrt{1-y_0^2}}. \tag{5.3.5}$$

Enfin, nous introduisons une fonction **Arc tangente**, notée $\text{Arc}\tan$, que nous définissons par :

$$g(y) = \text{Arc}\tan y \iff \left\{\left(g(y) \in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \textbf{et} \quad (\tan g(y) = y)\right\} \tag{5.3.6}$$

Cette fonction vérifie alors :

$$\forall y_0 \in]-\infty,+\infty[, \quad \frac{d\text{Arc}\tan}{dy}(y_0) = \frac{1}{1+y_0^2}. \tag{5.3.7}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

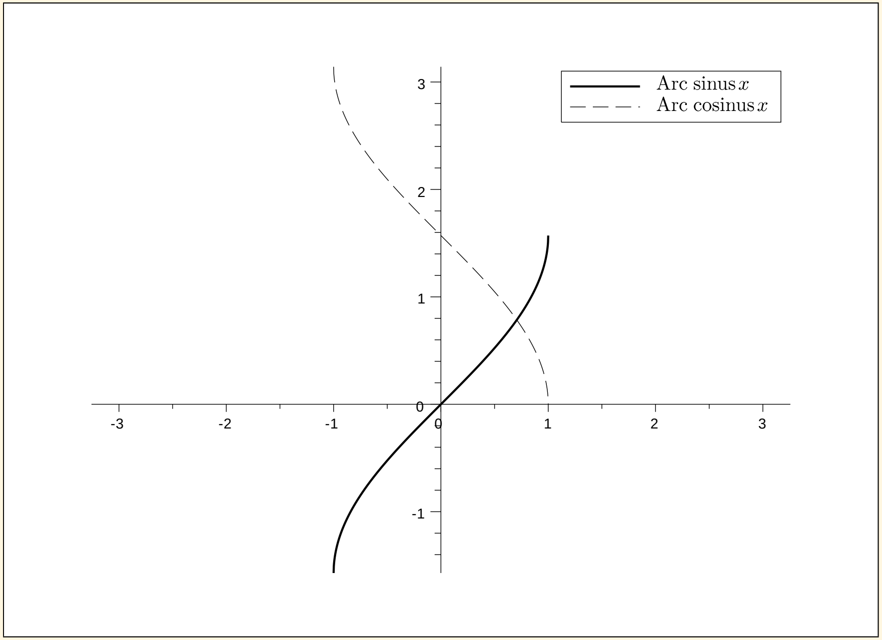

FIGURE 5.3.2 – Fonction Arc sinus

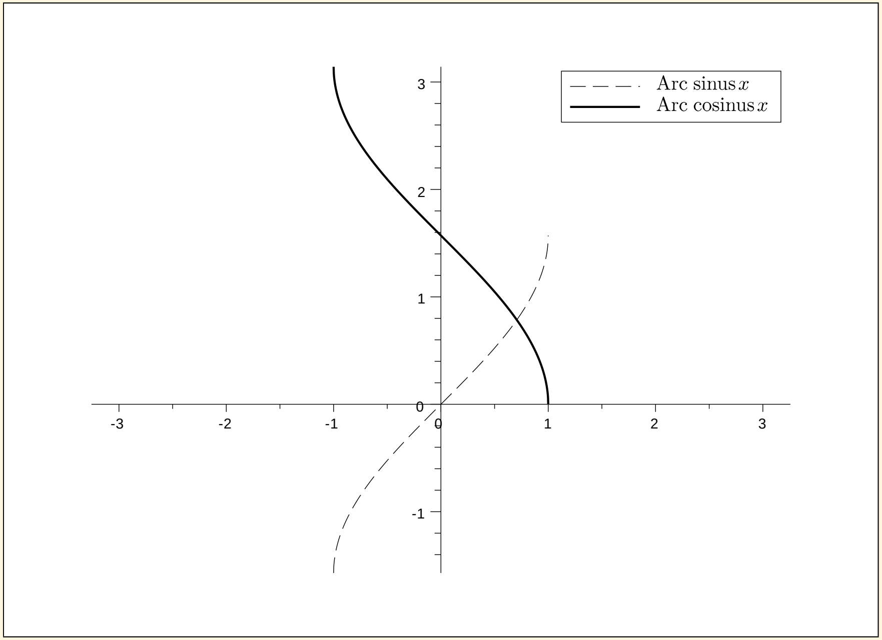

FIGURE 5.3.3 – Fonction Arc cosinus

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

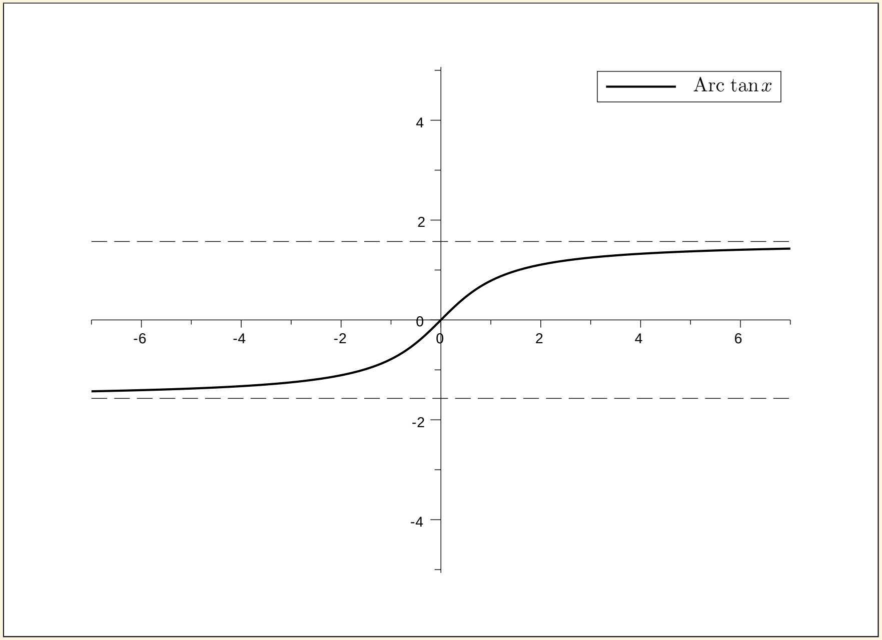

FIGURE 5.3.4 – Fonction Arc tangente

5.3.3 Fonction racine nième

Exercices :
Exercice A.1.19

Soit $n \geq 1$ un entier et soit la fonction $f(x) = x^n \; : \; \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$. Cette fonction est strictement monotone, puisque sa dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$ est strictement positive sur $x > 0$, elle admet donc une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}^+$ notée :

$$\boldsymbol{f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}},$$

Ainsi pour tout réel $y \geq 0$ on appelle **racine $\boldsymbol{n}^{\text{ème}}$ de** y l'unique réel $x \geq 0$ tel que $x^n = y$, que l'on note :

$$\boldsymbol{x = \sqrt[n]{y} = y^{1/n}}.$$

Pour n entier impair, la fonction $f(x) = x^n : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est strictement monotone et elle admet donc une fonction réciproque définie par

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt[n]{-x}, & \text{pour} \quad x < 0, \\ +\sqrt[n]{x}, & \text{pour} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Cette fonction peut être considérée donc comme la racine $n^{\text{ème}}$ de x pour $x \in \mathbb{R}$, quand n est impair, mais on remarquera que la notation $\sqrt[n]{x}$ n'est pas utilisée pour $x < 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 5

Exercice A.1.1 Ch5-Exercice1

Calculer la dérivée de $\cos x$ ou point $x = a$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch5-Exercice2

Montrer que la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch5-Exercice3

Montrer que si une fonction est dérivable en a elle est continue en a. Montrer, par un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch5-Exercice4

Soient α un nombre réel et f et g deux fonctions dérivables au point a. Montrer alors que :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \text{ et } (\alpha f)'(a) = \alpha f'(a).$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch5-Exercice5

Calculer la fonction dérivée de $\dfrac{\sin x}{x^2+1}$.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch5-Exercice6

Soit la fonction $f(x) = e^{x^2 \sin x}$, calculer sa dérivée en tout point où elle existe.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch5-Exercice7

écrire les conditions nécessaires que doivent vérifier les extrema des fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^3$. En vous aidant d'un graphique précisez si les points satisfaisant ces conditions nécessaires, sont des minima, des maxima ou rien.... Est-ce que $f'(\hat{x}) = 0$ implique que $\hat{x}$ est un extremum ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch5-Exercice8

Soit la fonction $f(x) = x$ sur $[0,1]$. Donner la valeur du minimum et du maximum de f sur l'intervalle considéré. La dérivée de f s'annule-t-elle en ces points ? Conclure.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch5-Exercice9

Soit f une fonction deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = f(c)$ $(a < b < c)$. La fonction f'' admet-elle un zéro strictement compris entre a et c ?

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch5-Exercice10

Soient α, β et γ trois nombres réels, on suppose $\alpha \neq 0$. Soit alors la fonction f définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Soit enfin, $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Déterminer $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch5-Exercice11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur Ω (intervalle ouvert). Soient $x \in \Omega$ et $h > 0$ tels que $x \pm h \in \Omega$. On définit la fonction $G(t) = f(x + th) + f(x - th)$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)$.
2. En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h).$$
3. En utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $c \in]x - \theta h, x + \theta h[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 2\theta h f''(c).$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch5-Exercice12

Soit la fonction $f(x) = x^3$. Est-elle strictement croissante? A-t-on $f'(x) > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$? Conclure.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch5-Exercice13

Soit la fonction $f(x) = -1/x$ définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Montrer que $f'(x) > 0$ sur le domaine de définition de f. Cette fonction est-elle strictement monotone ? Conclure.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch5-Exercice14

Si l'on approche la valeur de sinus 29° par celle de sinus 30°, encadrer l' erreur commise.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch5-Exercice15

En reprenant la démonstration de la condition suffisante de la convexité à partir de la dérivée seconde, montrer que si $\forall x \in \Omega,\ f''(x) > 0$, alors la fonction est strictement convexe sur Ω.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch5-Exercice16

Soit f une fonction bijective dérivable. On suppose en outre que f^{-1} est dérivable. En utilisant la définition de la fonction réciproque retrouver le résultat :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad (\text{avec } y_0 = f(x_0)).$$

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch5-Exercice17

En utilisant leur dérivée, donner une relation qui relie les fonctions **Arc sinus** et **Arc cosinus**.

Retour au cours

Solution

Exercice A.1.18 Ch5-Exercice18

On considère la fonction définie sur $D =]0, \pi[$ par $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$. Définir son application réciproque ainsi que la dérivée de celle-ci.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch5-Exercice19

Soit r un réel, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ on définira x^r par $x^r = e^{r\ln(x)}$. Montrer que $f(x) = x^r$: $\mathbb{R}_*^+ \mapsto \mathbb{R}_*^+$, est strictement monotone et que sa réciproque est (le vérifier à l'aide des définitions) :

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}} = e^{\frac{1}{r}\ln y}.$$

Calculer sa dérivée.

Retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1 TD5-Exercice1

1. Montrer que la fonction $x \mapsto x$ est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. On pourra soit travailler directement sur cette fonction soit utiliser la question 1) et le théorème sur la dérivée d'un produit de fonctions.
3. Soit $x \mapsto P(x)$ une fonction polynomiale :
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$
Montrer que cette fonction est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Soient $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto Q(x)$ deux fonctions polynomiales :
$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$
En quels points de $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto P(x)/Q(x)$ est-elle dérivable? Calculer sa dérivée en ces points.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD5-Exercice2

En quels points de $\mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \tan x$ sont-elles dérivables? Calculer leur dérivée en ces points.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD5-Exercice3

Soit la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}^+$. En quels points de $\mathbb{R}^+$, cette fonction est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée en ces points.

Aide 1

Exercice A.2.4 TD5-Exercice4

Soit $x \mapsto \exp(x)$ la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que cette fonction (la fonction exponentielle) est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD5-Exercice5

Utiliser la définition de la dérivée pour calculer les limites suivantes.

$i)\quad \dfrac{e^x-1}{x}$ quand $x\to 0$, $\qquad ii)\quad \dfrac{\ln x}{x-1}$ quand $x\to 1$,

$iii)\quad \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ quand $x\to 0$, $\qquad iv)\quad \dfrac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x-\frac{1}{2}}$ quand $x\to\dfrac{\pi}{3}$,

$v)\quad \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ quand $x\to\dfrac{\pi}{3}$, $\qquad vi)\quad \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ quand $x\to 0$

réponses : $i)$ 1, $ii)$ 1, $iii)$ 1, $iv)$ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$, $v)$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $vi)$ 2.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD5-Exercice6

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes lorsqu'elles existent :
$$(x^3-3x^2+6x-6)e^x,\ \ln(\tan\frac{x}{2}),\ \sin 3x^2,\ \cos^2(3\sin 4x),\ (1+x^2)^{\cos x},$$
$$\ln|2x^2-3x+1|,\ \frac{1}{1+x^2}+\operatorname{Arc}\tan x.$$
2. Calculer la dérivée nième de $\sin x$, $\cos x$.
3. Calculer la dérivée 5ième de x^3e^x.
4. Calculer la dérivée nième de $(x^2+1)e^x$, $x^2(x+1)^n$.
5. Calculer les dérivées des fonction suivantes lorsqu'elles existent : $\operatorname{Arc}\sin(2x+1)$, $\operatorname{Arc}\tan\dfrac{1+x}{1-x}$.

Question 1	Aide 1	Aide 2
Question 2	Aide 1	Aide 2
Question 3	Aide 1	Aide 2
Question 4	Aide 1	Aide 2
Question 5	Aide 1	Aide 2

Exercice A.2.7 TD5-Exercice7

Calculer les dérivées suivantes lorsqu'elles existent :

$$\cos(x^2+1),\ \cos^2 x,\ \sin(\cos x)),\ \ln|2x^2-3x+1|,\ \ln(\ln x),\ e^{3x^2+1},\ \frac{1}{e^{x+3}},\ xe^x,\ e^{\frac{1}{x^2-1}},\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

réponses :

$$-2x\sin(x^2+1),\ -2\cos x\sin x,\ -\sin x\cos(\cos x),\ \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} \text{ pour } x\notin\{1,\frac{1}{2}\},$$

$$\frac{1}{x\ln x} \text{ pour } x>1,\ 6xe^{3x^2+1},\ -e^{-x-3},\ (1+x)e^x,$$

$$\frac{-2x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{1}{x^2-1}} \text{ pour } x\notin\{-1,1\},\ \left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ pour } x\notin[-1,0]$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD5-Exercice8

1. Calculer la dérivée n^{eme} de la fonction $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$.
2. Choisir $a = b$, en déduire la relation $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4

Exercice A.2.9 TD5-Exercice9

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables ? Si oui, leur dérivée est-elle continue ?

1. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$,
2. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$,
3. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$,

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD5-Exercice10

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} x\cos\frac{1}{x} - x = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^2\cos\frac{1}{x} - x^2 + \frac{1}{2} = 0$.
2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_*$ par $f(x) = \cos\frac{1}{x}$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_*$, calculer $f'(x)$.
   (b) La fonction f admet-elle une limite quand x tend vers 0.
   (c) Représenter rapidement la courbe d'équation $y = f(x)$, en particulier quel est le comportement de la courbe quand x tend vers l'infini ?
   (d) i. Est-il possible de prolonger f par continuité en 0 ?
      ii. Si oui la fonction $\hat{f}$ ainsi définie est-elle dérivable en 0 ? Si oui calculer $\hat{f}'(0)$.
      iii. Si $\hat{f}$ est dérivable en 0, $\hat{f}'$ est-elle continue en 0 ?
3. Mêmes questions pour $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ puis pour $f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD5-Exercice11

Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire).

Aide 1

Exercice A.2.12 TD5-Exercice12

Soit une fonction n fois continûment dérivable, admettant $n+1$ racines distinctes. Montrer que $f^{(n)}$ admet au moins une racine.

Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 TD5-Exercice13

Utiliser la formule des accroissements finis pour montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \ 0 < \sin x < x, \ 1 - x^2 < \cos x < 1.$
2. $\forall x \in]0, \frac{\pi}{4}], \ x < \tan x < 2x.$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6 Aide 7 Aide 8 Aide 9
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Exercice A.2.14 TD5-Exercice14

f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ sur $]a,b[$.

1. Monter qu'il existe deux réels c_1 et c_2 tels que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$,
2. Montrer, en utilisant la fonction $\phi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$, qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1

Exercice A.2.15 TD5-Exercice15

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ telle que f' et f'' soient définies et continues sur $[a,b]$. On définit $\phi(x) = \dfrac{f(a)+f(x)}{2} - f\left(\dfrac{a+x}{2}\right) - \dfrac{(x-a)^2}{8}\alpha$.

1. Montrer que ϕ est dérivable sur $[a,b]$, calculer $\phi'(x)$, calculer $\phi(a)$.
2. On choisit α tel que $\phi(b)=0$, utiliser le théorème de Rolle pour en déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\alpha = \frac{f'(c) - f'\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\frac{c-a}{2}}.$$
3. Utiliser le théorème des accroissements finis pour en déduire qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que $\alpha = f''(d)$.
4. Déduire de ce qui précède que
$$\exists d \in]a,b[, \quad \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{8} f''(d)$$

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6 Aide 7
Question 4 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16 TD5-Exercice16

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable, vérifiant

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq q < 1. \end{cases}$$

On note

$$f^n = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$$

la composée n fois de f. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.17 TD5-Exercice17

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dérivable. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 1.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq f(0) + x,\ \text{et},\ \forall x \in \mathbb{R}^-,\ f(x) \leq f(0) + x.$$
3. Soit $y > f(0)$, on pose $x_0 = y - f(0)$.
   (a) Montrer que $y \leq f(x_0)$.
   (b) En déduire qu'il existe x tel que $y = f(x)$.
4. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3a Aide 1
Question 3b Aide 1
Question 4 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18 TD5-Exercice18

1. Montrer que si $0 < x < y$, alors $1 - \dfrac{x}{y} < \ln y - \ln x < \dfrac{y}{x} - 1$.
2. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}.$$
En déduire que $\sum_{1}^{n} \dfrac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
3. En s'inspirant de la démonstration précédente, montrer que $\sum_{2}^{n} \dfrac{1}{k \ln k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.19 TD5-Exercice19

1. Soit f une application convexe de I intervalle réel vers $\mathbb{R}$. Soient $n \in \mathbb{N}*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, éléments de I, on veut montrer la propriété P_n :

$$P_n: \quad f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_{1)} + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

   (a) Montrer que P_1 et P_2 sont vraies.

   (b) Montrer par récurrence que P_{n+1} est vraie (on pourra poser $a = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$).

2. Utiliser la question précédente pour montrer que

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \ (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

Question 1a Aide 1
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6
Question 2 Aide 1

Exercice A.2.20 TD5-Exercice20

Est-ce que la composée de fonctions convexes est convexe ? Justifier votre réponse.

Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.21 TD5-Exercice21

1. Calculer les quantités suivantes :

$$\mathrm{Arc}\sin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right),\ \mathrm{Arc}\sin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ \mathrm{Arc}\cos\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\mathrm{Arc}\sin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right),\ \mathrm{Arc}\cos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Arc}\sin x + \mathrm{Arc}\cos x = \frac{\pi}{2},\ -1 \leq x \leq 1.$$

3. Simplifier

$$\sin(2\mathrm{Arc}\sin x),\ \sin(2\mathrm{Arc}\cos x), \cos(2\mathrm{Arc}\sin x),\ \cos(2\mathrm{Arc}\cos x).$$

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.22 TD5-Exercice22

Donner le domaine de définition et la représentation graphique des fonctions suivantes :
$f_1(x) = \sin(\arcsin x)$, $f_2(x) = \arcsin(\sin x)$.

Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6 Aide 7 Aide 8

Exercice A.2.23 TD5-Exercice23

On définit $f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Quel est le domaine de définition D de f ?
2. Calculer la dérivée de la fonction f. En déduire une expression plus simple de $f(x)$ (distinguer selon les valeurs de x).
3. Tracer la courbe d'équation $y = f(x)$.
4. Déterminer $\operatorname{Im} f$.
5. Montrer que f est bijective de D sur $\operatorname{Im} f$.
6. Donner une expression de $g = f^{-1}$. Tracer la courbe représentative de g.
7. Calculer g', retrouver l'expression de f'.

Exercice A.2.24 TD5-Exercice24

On définit la fonction $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g dont on précisera le domaine de définition.
2. Montrer que g est dérivable sur son domaine de définition. Calculer $g'(1)$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6 Aide 7 Aide 8
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3 Aide 4 Aide 5 Aide 6 Aide 7

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.25 TD5-Exercice25

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^n \ln x$ si $x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$.

1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction identiquement nulle.
2. Pour $n \geq 1$ fixé, déterminer $u_n = \max\limits_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$.
3. En déduire que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction identiquement nulle.

Exercice A.2.26 TD5-Exercice26

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{nxe^{-nx}}{1-e^{-x}}$.

1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction identiquement nulle.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$.
3. En déduire que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction identiquement nulle.
4. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction identiquement nulle, avec la définition de convergence uniforme. *(Indication : justifier que $f_n(\frac{1}{n}) > \frac{1}{e}$.)*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.27 TD5-Exercice27

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0,n[\\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

1. Vérifier que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f à préciser.
2. Pour $n \geq 1$ fixé, déterminer $u_n = \max\limits_{x\in[n,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction φ_n sur $[0,n[$ par $\varphi_n(x) = (n-1)\ln(1-\frac{x}{n}) + x$.
   (a) En étudiant les variations de φ_n, montrer que $\exists x_n \in]1,n[$, $\varphi_n(x_n) = 0$.
   Dresser la tableau de signe de φ_n.
   (b) Exprimer $v_n = \max\limits_{x\in[0,n[} |f_n(x) - f(x)|$ en fonction de x_n.
   (c) Montrer que $x \mapsto xe^{-x}$ admet un maximum global sur $[0,+\infty[$ à préciser.
4. En déduire que (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f.

Exercice A.2.28 TD5-Exercice28

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$. On pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$.

1. Justifier que (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction S dont on ne cherchera pas l'expression algébrique.
2. Déterminer $u_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$.
3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|S_n(x) - S(x)| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
4. En déduire que (S_n) converge uniformément vers S sur $\mathbb{R}$.
5. Justifier que S est continue sur $\mathbb{R}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.29 TD5-Exercice29

On note H la fonction définie par $H(x) = \begin{cases} e^{2-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0. \end{cases}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n(x) = H(x-n)H(n+1-x)$. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} g_k(x) = g_0(x) + \sum_{k=1}^{n} (g_k + g_{-k})(x).$$

1. Vérifier que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \,]0,1[$, on a $g_0(x) = 0$.
2. Déterminer $c_0 \in \,]0,1[$ tel que $g_0(c_0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |g_0(x)|$.
3. Dresser le tableau de variation de g_0 et représenter graphiquement g_0.
4. Justifier que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = g_0(x-n)$.
5. En déduire que (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction S périodique de période 1.
6. Montrer que (S_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
7. Montrer que (S_n) ne converge pas uniformément vers S sur $\mathbb{R}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre 5

Exemple B.1.1 Dérivée du sinus

Soit $f(x) = \sin x$. Alors

$$f(a+h) = \sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$$

et donc

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1-\cos h}{h} \sin a + \frac{\sin h}{h} \cos a,$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \cos a,$$

puisque, d'après l'exemple 2 du chapitre 4, on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h \to 0\, h \neq 0} h \frac{1-\cos h}{h^2} = 0 \times \frac{1}{2} = 0.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre 5

Document C.1.1 Formule de Leibnitz

Proposition C.1.1. *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables, alors la fonction fg est elle-même n fois dérivable, et sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est donnée par la formule suivante :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

avec

$$(f)^0 = f, \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration -
Nous allons procéder par récurrence.

1. Pour $n = 1$, il s'agit de la dérivée d'un produit de fonctions.
2. On suppose maintenant que

$$(fg)^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)} g^{(n-1-k)}$$

et on va montrer que

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

En effet :

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= ((fg)^{(n-1)})' = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k} f^{(k)} g^{(n-1-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + f^{(k)} g^{(n-k)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.\end{aligned}$$

On remplace $k+1$ par j dans la première somme. Il vient

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1} f^{(j)} g^{(n-j)} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} f^{(j)} g^{(n-j)} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j}\right) f^{(j)} g^{(n-j)} + \binom{n}{n} f^{(n)} g + \binom{n}{0} g^{(n)} f.\end{aligned}$$

On obtient le résultat en remarquant que

$$\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} = \binom{n}{j},\ \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n},\ \binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}.$$

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Document C.1.2 Convexité et extrema

Voici une application importante de la convexité.

Proposition C.1.2. *Soit f une fonction définie, convexe sur $\mathbb{R}$, alors tout minimum local de f est aussi minimum global. Quand f est strictement convexe un tel minimum, s'il existe, est unique.*

Démonstration -

1. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}$, et a un minimum local de f : il existe $\alpha > 0$ tel que $f(a) \le f(x)$ pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$. Soit alors $y \in \mathbb{R}$ (y n'est pas supposé dans $]a-\alpha, a+\alpha[$). Posons $z = ty + (1-t)a$. Quand t tend vers 0, z tend vers a, donc z appartient à $]a-\alpha, a+\alpha[$ si t est suffisamment petit (et > 0). Utilisant la convexité et la propriété du minimum de a, on obtient alors
$$f(a) \le f(z) \le tf(y) + (1-t)f(a).$$
D'où $tf(a) \le tf(y)$, soit $f(a) \le f(y)$. Ainsi, a est bien minimum global de f.
2. Pour montrer l'unicité dans le cas d'une fonction strictement convexe, on suppose qu'il existe deux minima distincts $a_1 < a_2$ qui sont donc tels que $f(a_1) = f(a_2) = m$, avec $\forall x \in \mathbb{R},\ m \le f(x)$. Choisissons un $c \in]a_1, a_2[$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $c = a_1 + \theta(a_2 - a_1)$. Puisque la fonction est strictement convexe, on a
$$f(c) < (1-\theta)f(a_1) + \theta f(a_2) (= m)$$
ce qui est impossible puisque m est la valeur minimale de la fonction convexe.

Retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

On a

$$\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin h \sin a$$

et donc

$$\frac{cos(a+h) - \cos a}{h} = \cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \frac{\sin h}{h}$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, d'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

Si la dérivée de $f(x) = |x|$ en 0 existe, elle est donnée par

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

or la quantité $\frac{|h|}{h}$ est égale à 1 si $h > 0$ et à -1 si $h < 0$. Ceci signifie que la limite à droite en 0 est différente de la limite à gauche en 0 et qu'il n'y a donc pas de limite. La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

Si la fonction est dérivable en a, elle vérifie

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + |h|\varepsilon(h)$$

et si on fait tendre h vers 0, on obtient

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

ce qui signifie que la fonction est continue en a. Par contre une fonction continue n'est pas forcément dérivable, il suffit de considérer la fonction $|x|$ traitée dans l'exercice précédent.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

Calculons

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-g(a)}{h}$$

et comme les fonctions f et g sont dérivables en a,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = f'(a)+g'(a).$$

De même

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f)(a+h)-(\alpha f)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \alpha \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha f'(a).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

$$\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)' = \frac{\cos x(x^2+1) - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

$$f'(x) = e^{x^2 \sin x}(2x \sin x + x^2 \cos x).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

Pour que $\bar{x}$ soit un extremum d'une fonction, il doit annuler la dérivée de la fonction. Or $f'(x) = \cos x$ et $g'(x) = 3x^2$. Les extrema de f sont donc solutions de $\cos \bar{x} = 0$, soit $\bar{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et les extrema de g sont solutions de $3\bar{x}^2 = 0$. Or si l'on fait un graphe des fonctions f et g, on voit que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sont des maxima locaux de f et $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ sont des minima locaux de f. Par contre $\bar{x} = 0$ n'est pas un extremum de g (c'est un point d'inflexion!). En conclusion les points qui annulent la dérivée d'une fonction ne sont pas toujours des extrema de cette fonction.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

Puisque la fonction $f(x) = x$ est strictement croissante, le minimum de f est donné par $f(0) = 0$ et le maximum par $f(1) = 1$. Or $f'(x) = 1$ ce qui signifie que les extrema de f n'annulent pas la dérivée de la fonction. En effet ce ne sont pas des points intérieurs de l'intervalle et la condition nécessaire sur les extrema ne s'applique alors pas.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

On applique deux fois le théorème de Rolle et donc $\exists \alpha \in]a, b[$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et $\exists \beta \in]b, c[$ tel que $f'(\beta) = 0$. En conséquence, on a $\alpha < \beta$ et $f'(\alpha) = f'(\beta)$ et on peut appliquer à nouveau le théorème de Rolle. Ceci donne alors l'existence de $d \in]\alpha, \beta[$ tel que $f''(d) = 0$. Or $a < \alpha < b < \beta < c$, d'où on a $a < d < c$ et $f''(d) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

On a
$$f(b) - f(a) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma) = \alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a)$$
soit
$$f(b) - f(a) = (b - a)(\alpha(a + b) + \beta).$$
Or par le théorème des accroissements finis, il existe c tel que
$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$
d'où, puisque $f'(x) = 2\alpha x + \beta$, on obtient
$$2\alpha c + \beta = \alpha(a + b) + \beta$$
d'où
$$c = \frac{a + b}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

1. Si on définit $G_1(t) = f(x+th)$, G_1 est dérivable sur $[0,1]$. En effet, $G_1 = f o l_1$.
   L'application l_1 définie par $l_1(t) = x+th$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,1]$, on a de plus $l_1'(t) = h$.
   De plus, pour tout t appartenant à $[0,1]$, $l_1(t) \in [x, x+h] \subset \Omega$, donc la fonction f est dérivable en $l_1(t)$.
   En appliquant le théorème sur la dérivée des fonctions composées, G_1 est dérivable et on a
   $$G_1'(t) = f'(l_1(t))l_1'(t) = hf'(x+th).$$
   De même, si on définit $G_2(t) = f(x-th)$, G_2 est dérivable sur $[0,1]$. En effet, $G_2 = f o l_2$.
   L'application l_2 définie par $l_2(t) = x-th$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,1]$, on a de plus $l_2'(t) = -h$.
   De plus, pour tout t appartenant à $[0,1]$, $l_2(t) \in [x-h, x] \subset \Omega$, donc la fonction f est dérivable en $l_2(t)$.
   En appliquant le théorème sur la dérivée des fonctions composées, G_2 est dérivable et on a
   $$G_2'(t) = f'(l_2(t))l_2'(t) = -hf'(x-th).$$
   On a $G = G_1 + G_2$, donc G est dérivable sur $[0,1]$ et on a
   $$G'(t) = hf'(x+th) - hf'(x-th).$$
   Le théorème des accroissements finis donne l'existence de $\theta \in]0,1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)$.
2. On calcule
   $$G(1) = f(x+h) + f(x-h), \;\; G(0) = 2f(x)$$
   Donc en remplaçant, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
   $$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h).$$

3. Si on pose

$$a = x - \theta h, b = x + \theta h$$

Pour $\theta \in [0,1]$, on a $[a,b] \subset [x-h, x+h] \subset \Omega$.

Cette fois, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f' qui est dérivable sur $[a,b]$ et on obtient

$$\exists c \in]a,b[, \quad f'(b) - f'(a) = (b-a) f''(c) \Leftrightarrow \exists c \in]x-\theta h, x+\theta h[, \quad f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h) = 2\theta h f''(c)$$

On a donc

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 2\theta h f''(c).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

Pour montrer que la fonction x^3 est strictement croissante, on prend $x < y$ et on calcule

$$f(y) - f(x) = y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + xy + x^2)$$

Or le terme $y^2 + xy + x^2$ peut être considéré comme un trinôme du second degré en y dont le discriminant est $x^2 - 4x^2 = -3x^2 < 0$, ce qui veut dire qu'il n'a pas de racine réelle et donc qu'il est toujours strictement positif. On en déduit que $f(y) - f(x) > 0$ et la fonction x^3 est strictement croissante. Par contre $f'(x) = 3x^2$ s'annule pour $x = 0$. En conclusion une fonction strictement croissante n'a pas une dérivée strictement positive en tout point.

Retour à l'exercice ▲

Pour $x < 0$ ou $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$. Or cette fonction n'est pas strictement monotone puisque $f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$!
Pour que $f'(x) > 0$ sur Ω implique que la fonction est strictement monotone sur Ω il faut que Ω soit un intervalle (et non pas l'union de deux intervalles disjoints !).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

Nous avons

$$\sin\frac{\pi}{6} - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

où $\theta \in \left]\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{6}\right[$. Or la fonction cosinus est décroissante sur cet intervalle, ce qui veut dire que $0 < \cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où

$$\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) < \frac{\pi}{180}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

soit

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{180}\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) < \frac{1}{2}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

La seule chose qui est modifiée est que puisque $f''(x) > 0$ et non pas $f''(x) \geq 0$, la monotonie devient stricte et donc la fonction ϕ sera strictement négative sur $]0,1[$, ce qui conduira à la stricte convexité.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

L'application réciproque vérifie $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Si les deux applications sont dérivables on peut donc dériver la fonction composée et obtenir

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

ce qui donne

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

si $y_0 = f(x_0)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

Puisque $\operatorname{Arc}\cos' y = -\operatorname{Arc}\sin' y$ en prenant la primitive, on a

$$\operatorname{Arc}\cos y = -\operatorname{Arc}\sin y + C.$$

La constante C est déterminée par $y = 0$, ce qui donne $\frac{\pi}{2} = 0 + C$, d'où

$$\operatorname{Arc}\cos y + \operatorname{Arc}\sin y = \frac{\pi}{2}$$

.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

La fonction cot est bijective de $[0,\pi]$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque définie de $\mathbb{R}$ sur $[0,\pi]$ dont la dérivée est $-\frac{1}{1+y^2}$ (facile à démontrer).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

La dérivée de $f(x) = e^{r\ln(x)}$ est donnée par $f'(x) = \frac{r}{x}e^{r\ln(x)}$, qui est strictement positive pour $x > 0$. L'image par f de $]0,+\infty[$ est $]0,+\infty[$. Donc la fonction x^r est donc bijective de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}_*^+$. Elle admet donc une application réciproque définie de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}_*^+$ que l'on calcule par

$$y = e^{r\ln(x)} \Leftrightarrow \ln y = r\ln x \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{r} lny$$

donc l'application réciproque de x^r est bien $e^{\frac{1}{r}\ln y} = y^{\frac{1}{r}}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.1

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \neq 0, \quad \frac{(x+h)-x}{h} = 1$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.1

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall h \neq 0, \quad \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.1

Utiliser la dérivée d'un produit de fonctions dérivables pour montrer que chaque $x \mapsto x^k$ est dérivable. On conclut par linéarité.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.1

Par récurrence, et en utilisant la formule donnant la dérivée d'un produit de fonctions dérivables, on obtient que

$$(x^k)' = kx^{k-1}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.1

Il suffit d'utiliser les résultats concernant la dérivée du quotient de deux fonctions dérivables.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.2

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x(\cos h-1)+\sin h\cos x}{h}\\
\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{\cos x(\cos h-1)-\sin h\sin x}{h}
\end{aligned}$$

Utiliser ensuite les limites (connues, relire le chapitre 4) suivantes

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h^2} &= \frac{1}{2}\\
\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} &= 1
\end{aligned}$$

pour conclure que $\sin' x = \cos x$ et $\cos' x = -\sin x$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.2

Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, utiliser les résultats précédents et celui concernant la dérivée d'un quotient de fonctions dérivables pour conclure que $x \mapsto \tan x$ est dérivable en tout réel x tel que $\cos x \neq 0$ (et donc $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$). En de tels points, on a

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.3

On rappelle que la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

est la fonction réciproque de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

qui est partout dérivable (voir exercice A.2.1) et dont la dérivée $f'(x) = 2x$ ne s'annule qu'en $x = 0$. En utilisant le résultat concernant la dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable, on en déduit que g est dérivable en dehors de 0 et

$$\forall x > 0, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.4

On définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} g\ :\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \longmapsto & \exp x \end{array}$$

comme la fonction réciproque de la fonction

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

qui est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et dont la dérivée $f'(x) = \frac{1}{x}$ ne s'annule pas. En utilisant le résultat concernant la dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable, on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\exp x)' = \frac{1}{f'(\exp x)} = \frac{1}{\frac{1}{\exp x}} = \exp x$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.5

Dans chacun des cas faire apparaitre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

avec f et x_0 judicieusement choisis.

Si la fonction f est dérivable en x_0, la limite sera alors égale à $f'(x_0)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.5

- Pour i) on peut choisir $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.
- Pour ii) on peut choisir $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.
- Pour iii) on peut choisir $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.
  Ou plus simplement utiliser le résultat ii) en posant $t = 1 + x$, on aura alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1.$$

- Pour iv) on peut écrire

$$\frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} = \frac{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} \times \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\cos x - \frac{1}{2}}$$

  Pour le premier terme choisir $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, pour le deuxième choisir $g(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.
  La limite quand x tend vers $\frac{\pi}{3}$ sera alors égale à

$$\frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)}.$$

- Pour v) on peut écrire

$$\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} = -\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \times \frac{x - \frac{\pi}{3}}{\cos x - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}$$

  Pour le premier terme, en posant $t = x - \frac{\pi}{3}$, on retrouve la limite classique

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

  Pour le deuxième terme, choisir $f(x) = \cos x$ et $x_0 = \frac{\pi}{3}$. La limite vaut $\dfrac{1}{-\sin\frac{\pi}{3}} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

— Pour vi) on peut écrire

$$\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{(e^x - 1) + (1 - e^{-x})}{\sin x} = \frac{e^x - 1}{\sin x} - \frac{e^{-x} - 1}{\sin x} = \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x} \times \frac{x}{\sin x}.$$

On retrouve la limite classique

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

On peut utiliser le résultat de i), $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Et enfin pour $\frac{e^{-x} - 1}{-x}$, en posant $t = -x$, on se ramène à $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.6

Etudier les résultats concernant la dérivée de produit, somme, composée, . . ., de fonctions dérivables.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.6

$$
\begin{aligned}
((x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x)' &= x^3 e^x \\
\left(\ln\left(\tan \frac{x}{2}\right)\right)' &= \frac{1}{\sin x} \\
(\sin 3x^2)' &= 6x \cos 3x^2 \\
(\cos^2(3\sin 4x))' &= -24\cos 4x \cos(3\sin 4x)\sin(3\sin 4x) \\
((1+x^2)^{\cos x})' &= e^{\cos x \ln(1+x^2)}\left(\frac{2x\cos x}{1+x^2} - \sin x \ln(1+x^2)\right) \\
(\ln|2x^2 - 3x + 1|)' &= \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} \\
\left(\frac{1}{1+x^2} + \mathrm{Arc}\tan x\right)' &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.6

Procéder par récurrence sur n, l'ordre de dérivation.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.6

$$\begin{aligned} \sin^{(n)} x &= \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \\ \cos^{(n)} x &= \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser la formule de Leibniz.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.6

$$\begin{aligned}(x^3 e^x)^{(5)} &= \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^3)^{(k)} (e^x)^{(5-k)} \\ &= (x^3 + 15x^2 + 60x + 60)e^x\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.6

Utiliser la formule de Leibniz.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.6

$$
\begin{aligned}
((x^2+1)e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2+1)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\
&= (x^2+2nx+n(n-1)+1)e^x \\
(x^2(x+1)^n)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} ((x+1)^n)^{(n-k)} \\
&= n!\left(x^2+2nx(x+1)+\frac{n(n-1)}{2}(x+1)^2\right)
\end{aligned}
$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.2.6

(re-)voir la partie du cours traitant des fonctions circulaires et de leurs inverses.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 5, Exercice A.2.6

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{Arc}\sin(2x+1))' &= \frac{2}{\sqrt{-4x(1+x)}} \qquad (\forall x \in \left]\frac{-1}{2}, 0\right[) \\
\left(\operatorname{Arc}\tan\frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{1}{1+x^2} \qquad (\forall x \neq 1)
\end{aligned}
$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.8

La fonction f est un produit, donc il faut utiliser la formule de Leibnitz.

Retour à l'exercice ▲

Quelle est la dérivée k^{eme} de la fonction $g(x) = (x-c)^p$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.8

$$g^{(k)}(x) = \frac{p!}{(p-k)!}(x-c)^{p-k}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.8

Utiliser le résultat précédent avec $c = a$ puis $c = b$ et $p = n$.
k varie entre 0 et n.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)^2 (x-a)^{n-k}(x-b)^k.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.8

Si $a = b$, on a alors

$$f(x) = (x - a)^{2n}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.8

L'expression obtenue avec la formule de Leibnitz est toujours valable, mais elle devient plus simple.

On obtient une première expression de $f^{(n)}(x)$.

Retour à l'exercice ▲

D'autre part il est possible de calculer directement la dérivée n^{eme} de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.8

Reprendre la fonction g avec $c = a$, $p = 2n$ et $k = n$, on trouve

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n.$$

Comparer avec la première expression et conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.9

f n'est pas continue en 0 (voir exercice de TD du chapitre 4) et donc f n'est pas dérivable en 0.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.9

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Retour à l'exercice ▲

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} = x \sin \frac{1}{x}$$

tend vers 0 quand $x \to 0$. Donc f est dérivable en $x = 0$ et on a $f'(0) = 0$. D'autre part f est bien sûr dérivable en $x \neq 0$ et on a (appliquer les résultats sur la dérivée d'un produit, d'une composée, ..., comme d'hab.)

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$, donc f' n'est pas continue en 0 (On dit que f est dérivable, mais pas de classe C^1).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.11

Il suffit de dériver les deux membres de l'égalité $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$), valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ si f est paire (resp. impaire).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.12

Utiliser le théorème de Rolle (vérifier les hypothèses) et raisonner par récurrence.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.13

Pour les fonctions sin, cos, tan, utilisez la formule des accroissements finis avec $a = 0$, $b = x$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.13

$$\exists c \in]0,x[\quad \sin x - \sin 0 = x \cos c.$$

On ne connait pas c, mais on peut majorer $\cos c$.

Retour à l'exercice ▲

$$0 < c < x$$

Or

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$0 < c < \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$1 > \cos c > 0$$

Continuer.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.13

De plus x est STRICTEMENT POSITIF (attention à la manipulation des inégalités) donc

$$0 < \cos c < 1 \Longrightarrow 0 < x \cos c < x \Longrightarrow 0 < \sin x < x.$$

Faire quelquechose de similaire pour l'encadrement de $\cos x$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 1, Exercice A.2.13

$$\exists c' \in]0, x[\quad \cos x - \cos 0 = -x \sin c'.$$

On a donc

$$\cos x = 1 - x \sin c'$$

Comme précédemment

$$0 < c' < \frac{\pi}{2}.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 1, Exercice A.2.13

Utiliser ce qui précède pour encadrer $\sin c'$

Retour à l'exercice ▲

D'après ce qui vient dêtre démontré

$$0 < \sin c' < c'.$$

Retour à l'exercice ▲

De plus $c' < x$, donc

$$0 < \sin c' < x.$$

Retour à l'exercice ▲

x est STRICTEMENT POSITIF, donc $-x$ est STRICTEMENT NEGATIF, donc

$$0 < \sin c' < x \Longrightarrow 0 > -x \sin c' > -x^2 \Longrightarrow 1 > \cos x > 1 - x^2.$$

Retour à l'exercice ▲

$$\exists c \in]0,x[,\ \ \tan x - \tan 0 = x(1+\tan^2 c).$$

Retour à l'exercice ▲

$$0 < c < x$$

Or

$$0 < x \leq \frac{\pi}{4}$$

Donc

$$0 < c < \frac{\pi}{4}.$$

La fonction $1 + \tan^2$ est strictement croissante, donc

$$1 < 1 + \tan^2 c < 2$$

Terminer.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.13

De plus x est STRICTEMENT POSITIF (attention à la manipulation des inégalités) donc

$$1 < 1 + \tan^2 c < 2 \Longrightarrow x < x(1 + \tan^2 c) < 2x \Longrightarrow x < \tan x < 2x.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.14

Utiliser la formule des accroissements finis (vérifier ses hypothèses) sur f, puis g. Dire pourquoi le rapport des deux expressions obtenues est possible.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.14

Utiliser la formule des accroissements finis (vérifier ses hypothèses) sur ϕ. Dire pourquoi $g(a) \neq g(b)$.

Retour à l'exercice ▲

On obtient immédiatement

$$\phi(a) = 0$$

Retour à l'exercice ▲

ϕ est une somme de constantes, de monômes et de fonctions composées utilisant la fonction f.

Pour chacune des fonctions composées à partir de f, vérifier que l'on se trouve dans le domaine de dérivabilité de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.15

La fonction qui à x associe $\frac{a+x}{2}$ est dérivable.

Vérifier que de plus $x' = \frac{a+x}{2}$ est compris entre a et b.

On pourra en déduire que f est dérivable en x'.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.15

Pour la dérivée de ϕ, utiliser les résultats sur la dérivée d'une somme, sur la dérivée d'une fonction composée.

Retour à l'exercice ▲

On obtient

$$\phi'(x) = \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{x-a}{4}\alpha.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.15

Bien vérifier que toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont satisfaites.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.15

On a bien sûr
$$\phi(a) = \phi(b) = 0$$

Mais également, ϕ est dérivable sur $[a, b]$, donc continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
On peut donc utiliser le théorème de Rolle, on obtient le résultat recherché.

Retour à l'exercice ▲

A quelle fonction faut-il appliquer le théorème des accroissemnts finis ?
Entre quels points ?

Retour à l'exercice ▲

On note dans la question précédente un accroissement, d'où l'idée de choisir la fonction f'.

On choisit

$$a' = c, \quad b' = \frac{a+c}{2}.$$

Que vaut $a' - b'$?

Retour à l'exercice ▲

L'accroissement de la question précédente peut donc s'écrire

$$\alpha = \frac{f'(a') - f'(b')}{a' - b'}.$$

Vérifier que les hypothèses du théorème des accroissements finis sont satistaites.

Retour à l'exercice ▲

$a' - b' > 0$ donc $b' < a'$.

Pour appliquer le théorème des accroissements finis, il faut donc vérifier que f' est continue sur $[b', a']$ et dérivable sur $]b', a'[$.

Retour à l'exercice ▲

On sait que f'' est définie sur $[a,b]$, donc f' est dérivable sur $[a,b]$.

On a donc f' continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

De plus $[b',a'] \subset [a,b]$.

Donc f' continue sur $[b',a']$ et dérivable sur $]b',a'[$.

Retour à l'exercice ▲

On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis.

Il existe $d \in]b', a'[$ tel que

$$\alpha = \frac{f'(c) - f'\left(\dfrac{a+c}{2}\right)}{\dfrac{c-a}{2}} = \frac{f'(a') - f'(b')}{a' - b'} = f''(d).$$

Il reste à montrer que $d \in]a, b[$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 7, Question 3, Exercice A.2.15

On sait

$$a = b' < d < a' = \frac{a+c}{2} < b.$$

Donc

$$d \in]a, b[.$$

Retour à l'exercice ▲

Ecrire que $\phi(b) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.16

Utiliser la formule des accroissements finis entre x et 0 pour obtenir $f(x) = f(x) - f(0) = f'(c)(x-0) = f'(c)x$ et donc la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq q|x|$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.16

On peut montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^n(x)| \leq q^n |x|.$$
Pour cela on suppose la propriété vraie au rang n puis il suffit d'écrire que
$$f^{n+1}(x) = f^n(f(x)).$$
On a donc
$$|f^{n+1}(x)| = |f^n(f(x))| \leq q^n |f(x)|,$$
et puisque $|f(x)| \leq q|x|$, on obtient
$$|f^{n+1}(x)| \leq q^{n+1}|x|.$$
On conclut en utilisant $0 \leq q < 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.17

Utiliser la formule des accroissements finis entre deux réels quelconques x_1 et x_2. On remarquera qu'il suffit alors de $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour conclure à l'injectivité de f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.17

Utiliser la formule des accroissements finis entre x et 0. Comme on a $f'(c) > 1$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) - f(0) & = & f'(c)x \geq x \\ \forall x \in \mathbb{R}^-, \quad f(x) - f(0) & = & f'(c)x \leq x \end{array}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3a, Exercice A.2.17

Par hypothèse $x_0 = y - f(0) \geq 0$ et il suffit d'utiliser le résultat du 2.

Retour à l'exercice ▲

On a obtenu $f(0) < y \leq f(x_0)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (vérifier ses hypothèses), on obtient l'existence d'un réel $x \in [0, x_0]$ tel que $y = f(x)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.17

Refaire le raisonnement ci-dessus dans le cas $y < f(0)$. On en déduit que f est surjective, et donc bijective (car en 1. on a prouvé l'injectivité).

Retour à l'exercice ▲

La formule des accroissements finis fait merveille. On l'applique à $F(t) = \ln t$ entre x et y. On remarquera que si $0 < x < z < y$, alors $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{z} < \frac{1}{x}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.18

Utiliser la formule précédente avec $x = k$ et $y = k + 1$. Il suffit ensuite de faire la somme des inégalités obtenues.

Retour à l'exercice ▲

Dans ce qui précède, $F(t) = \ln t$ est une primitive de $f(t) = \frac{1}{t}$. D'où l'idée de refaire le raisonnement précédent avec une primitive de $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.18

$f(t) = \frac{1}{t \ln t}$ est du type u'/u. Une primitive est $F(t) = \ln \ln t$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.19

P_1 est triviale.

Pour P_2 traduire la propriété de convexité de f en choisissant $t = \frac{1}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

On suppose que P_n est vraie.

Montrer que P_{n+1} est vraie.

Suivre le conseil donné et introduire a.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.19

On a donc

$$x_1 + \ldots + x_n = na$$

Utiliser cette relation pour exprimer

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right).$$

Retour à l'exercice ▲

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n+x_{n+1}}{n+1}\right)=f\left(\frac{n}{n+1}a+\frac{1}{n+1}x_{n+1}\right).$$

Utiliser la convexité de f sur I.

Retour à l'exercice ▲

a et x_{n+1} appartiennet à I.

On peut choisir

$$t = \frac{n}{n+1},$$

donc

$$1 - t = \frac{1}{n+1}.$$

On applique la propriété de convexité.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 1b, Exercice A.2.19

$$f\left(\frac{n}{n+1}a+\frac{1}{n+1}x_{n+1}\right)\leq\frac{n}{n+1}f(a)+\frac{1}{n+1}f(x_{n+1}).$$

Appliquer l'hypothèse de récurrence à $f(a)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 1b, Exercice A.2.19

$$f(a) = f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Multiplier par le nombre positif $\frac{n}{n+1}$ et terminer le calcul.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.19

Appliquer le résultat précédent à la fonction convexe $f(x) = x^2$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.20

Non, pas forcément, trouver un contre-exemple.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.20

Beaucoup de contre-exemples possibles.

On peut prendre

$$f(x) = x^2 - 2, \; g(x) = x^2, \; gof(x) = x^4 - 4x^2 + 4.$$

f et g sont convexes sur $\mathbb{R}$, gof ne l'est pas : il suffit de calculer les dérivées secondes pour s'en convaincre.

Retour à l'exercice ▲

(Re-)lire le cours traitant des fonctions circulaires et de leurs réciproques. La seule difficulté est de prendre l'argument dans le bon intervalle.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.21

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arc}\sin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{6}\\
\operatorname{Arc}\sin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{\pi}{6}\\
\operatorname{Arc}\cos\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{5\pi}{6}\\
\operatorname{Arc}\sin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right) &= -\frac{\pi}{6}\\
\operatorname{Arc}\cos\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) &= \frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$

Retour à l’exercice ▲

Vérifier la formule pour $x = -1$ et $x = 1$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.21

Pour $-1 < x < 1$, vérifier que $(\operatorname{Arc}\sin x + \operatorname{Arc}\cos x)' = 0$. Conclure que $\operatorname{Arc}\sin x + \operatorname{Arc}\cos x$ est une constante. Prendre une valeur de x judicieusement choisie pour calculer sa valeur.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.21

Pour tout $-1 \leq x \leq 1$, on a $\sin(\operatorname{Arc}\sin x) = x$ et $\cos(\operatorname{Arc}\cos x) = x$. On utilise des formules trigonométriques (simples, du style $\sin 2\theta = \cdots, \ldots$) pour se ramener à ces cas.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.21

$$\begin{aligned}
\sin(2\operatorname{Arc}\sin x) &= 2x\sqrt{1-x^2}\\
\sin(2\operatorname{Arc}\cos x) &= 2x\sqrt{1-x^2}\\
\cos(2\operatorname{Arc}\sin x) &= 1-2x^2\\
\cos(2\operatorname{Arc}\cos x) &= 2x^2-1
\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Exercice A.2.22

Pour f_1, $D_1 = [-1,1]$.

Pour f_2, $D_2 = \mathbb{R}$.

Que signifie

$$\left\{\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ x \in [-1,1] \end{array}\right. \quad ?$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Exercice A.2.22

D'après la définition

$$\left\{\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right.$$

On a donc toujours

$$\sin y = \sin \arcsin x = x.$$

Donc

$$\forall x \in D_1, \;\; f_1(x) = x.$$

Pour f_2, réduire l'intervalle d'étude afin de se ramener dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Exercice A.2.22

(1) f_2 est périodique,
(2) f_2 est impaire et
(3) $f_2(\pi - x) = f_2(x)$.
Utiliser toutes ces propriétés, pour réduire l'intervalle d'étude de f_2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Exercice A.2.22

La propriété (1) permet l'étude sur un intervalle $[a, a+2\pi]$, on obtient ensuite la courbe sur $\mathbb{R}$ par translation.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Exercice A.2.22

La propriété (2) suggère de choisir $a = -\pi$, on étudie sur $[0, \pi]$, on effectue une symétrie par rapport à O et on obtient la courbe sur $[-\pi, \pi]$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Exercice A.2.22

La propriété (3) permet de restreindre l'étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis d'obtenir la courbe sur $[0, \pi]$ en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

Que vaut $f_2(x)$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 7, Exercice A.2.22

En appliquant la définition on trouve

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \; f_2(x) = x.$$

Retour à l'exercice ▲

On trace la courbe étape par étape :
sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
puis sur $[0, \pi]$
puis sur $[-\pi, \pi]$
et enfin sur $\mathbb{R}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.24

Commencer par vérifier que f est bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

Montrer que f est injective.

Déterminer $F = \text{Im } f$.

Alors f sera bijective de $\mathbb{R}$ dans F et on saura que f admet une fonction réciproque g définie sur F et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Retour à l’exercice ▲

Montrer que f est strictement monotone, donc injective.

Utiliser les résultats du chapitre5.

Retour à l'exercice ▲

On calcule la dérivée de f et on trouve

$$f'(x) = \frac{3}{2(x^2+x+1)^{3/2}}.$$

La dérivée est strictement positive donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc f est injective.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 1, Exercice A.2.24

Il faut maintenant déterminer $\operatorname{Im} f$.

Calculer

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Il faut lever les indéterminations.

Retour à l'exercice ▲

Aide 5, Question 1, Exercice A.2.24

Quand x tend vers $+\infty$, on a une indétermination de la forme $\frac{+\infty}{+\infty}$.
Quand x tend vers $-\infty$, on a une indétermination de la forme $\frac{-\infty}{+\infty}$

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 1, Exercice A.2.24

Pour lever ces indéterminations, on peut mettre x en facteur au numérateur et au dénominateur.

Retour à l'exercice ▲

Quand $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$.
Quand $x \leq 0$, $\sqrt{x^2} = -x$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 8, Question 1, Exercice A.2.24

On trouve :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2.$$

D'où $\operatorname{im} f =]-2,+2[$.
f est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-2,2[$.
Elle admet donc une application réciproque g dont le domaine de définition est $]-2,2[$.

Retour à l'exercice ▲

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ET f' ne s'annule pas, donc g est dérivable sur son domaine de définition.

Retour à l'exercice ▲

Quelle est l'expression de $g'(x)$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.24

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Pour avoir $g'(1)$, il faut donc déterminer $g(1)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 2, Exercice A.2.24

$$a = g(1) \Leftrightarrow 1 = f(a) \Leftrightarrow 1 = \frac{2a+1}{\sqrt{a^2+a+1}} \Leftrightarrow 2a+1 = \sqrt{a^2+a+1}.$$

Continuer.

Retour à l'exercice ▲

Attention $\alpha = \beta$, n'est pas équivalent à $\alpha^2 = \beta^2$.

On a seulement une implication, pour la réciproque, il faut de plus que α et β aient le même signe.

Retour à l'exercice ▲

Aide 6, Question 2, Exercice A.2.24

$$2a+1=\sqrt{a^2+a+1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a+1\geq 0 \\ (2a+1)^2=a^2+a+1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2a+1\geq 0 \\ 3a^2+3a=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow a=0.$$

En déduire $g'(1)$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 7, Question 2, Exercice A.2.24

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{2}{3}.$$

Retour à l'exercice ▲