Chapitre 2 : Analyse vectorielle

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT

Chapitre 2

Analyse vectorielle

2.1 Rappels

2.1.1 Produit scalaire

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3

Sauf mention contraire on se place dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ Soient $\vec{U}$, $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \vec{U} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Le **produit scalaire** de $\vec{U}_1$ par $\vec{U}_2$ est le réel défini par :

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

La **norme (euclidienne)** de $\vec{U}$ est définie par :

$$\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{\vec{U}.\vec{U}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

On a la relation qui lie le produit scalaire et les normes :

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = \left\|\vec{U}_1\right\| \left\|\vec{U}_2\right\| cos\theta,$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

où θ est l'angle des vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$.

Propriétés du produit scalaire

$$\begin{array}{rcl} \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = \vec{U}_2 \cdot \vec{U}_1 & , & (\alpha \vec{U}_1) \cdot \vec{U}_2 = \alpha(\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2) \\ \vec{U}_1 \cdot (\vec{U}_2 + \vec{U}_3) = \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 + \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3 & , & (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2)^2 \leq (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1)(\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2) \end{array}$$

Proposition 2.1.1. *Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.*

2.1.2 Produit vectoriel

Exercices :
Exercice A.1.4
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7

Soient $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$,

le **produit vectoriel** de $\vec{U}_1$ par $\vec{U}_2$ est le vecteur défini par :

$$\vec{U}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - c_1 b_2 \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

On admet les résultats suivants concernant la norme, la direction et l'orientation du produit vectoriel :

- $\left\|\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2\right\| = \left\|\vec{U}_1\right\| \left\|\vec{U}_2\right\| |sin\theta|$ où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$.
- Le vecteur $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2$ est orthogonal à $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$.
- L'orientation de $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2$ est telle que le trièdre $(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2)$ soit direct.

Propriétés du produit vectoriel

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = -\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_1, \quad (\alpha \vec{U}_1) \wedge \vec{U}_2 = \alpha(\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 + \vec{U}_3) = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 + \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_3$$

$$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) = (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3)\vec{U}_2 - (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2)\vec{U}_3$$

Proposition 2.1.2. *La norme du produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$.*

Il résulte de la propriété sur la norme du produit vectoriel que :

Proposition 2.1.3. *Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.*

2.1.3 Produit mixte

Exercices :
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9

Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Le **produit mixte** de $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ est le scalaire défini par :

$$\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right) = (\vec{U}\wedge\vec{V})\cdot\vec{W}.$$

Proposition 2.1.4. *La valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallépipède construit sur $\vec{U},\vec{V},\vec{W}$.*

Proposition 2.1.5. *Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.*

En effet dans ce cas le parallépipède est "dégénéré", son volume est nul.

Une autre propriété immédiate est que :

$$\left|\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)\right| = \left|\left(\vec{V},\vec{W},\vec{U}\right)\right| = \left|\left(\vec{W},\vec{U},\vec{V}\right)\right| =$$

$$= \left|\left(\vec{V},\vec{U},\vec{W}\right)\right| = \left|\left(\vec{U},\vec{W},\vec{V}\right)\right| = \left|\left(\vec{W},\vec{V},\vec{U}\right)\right|$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En effet le volume du parallélépipède ne dépend pas de l'ordre dans lequel on cite les vecteurs ! En revanche les 6 produits mixtes ne sont pas égaux, en effet le signe de $\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)$ est positif si le trièdre $\vec{U},\vec{V},\vec{W}$ est direct, il est négatif sinon. On obtient donc les égalités suivantes :

$$\left(\vec{U},\vec{V},\vec{W}\right)=\left(\vec{V},\vec{W},\vec{U}\right)=\left(\vec{W},\vec{U},\vec{V}\right)=$$

$$=-\left(\vec{V},\vec{U},\vec{W}\right)=-\left(\vec{U},\vec{W},\vec{V}\right)=-\left(\vec{W},\vec{V},\vec{U}\right)$$

Produit mixte

2.1.4 Champs de vecteurs

Définition 2.1.1. *On appelle champ de vecteurs une application de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *. Une notation couramment utilisée sera, par exemple ,* $\vec{V}(M)$*, ce qui signifie qu'à tout point* M *de* $\mathbb{R}^3$*, on associe un vecteur* $\vec{V}(M)$ *de* $\mathbb{R}^3$

Bien sûr M est un triplet (x, y, z) et $\vec{V}(M)$ est également un triplet dont les 3 termes dépendent de x, y, z. Les composantes de $\vec{V}(M)$ sont notées selon les cas

$$\vec{V}(M) = (V_1(M), V_2(M), V_3(M),$$

$$\vec{V}(M) = (P(M), Q(M), R(M),$$

$$\vec{V}(M) = (X(M), Y(M), Z(M),$$

dans tous les cas les fonctions $V_1, V_2, V_3, P, Q, R, X, Y, Z$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

2.1.5 Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques

Exercices :
Exercice A.1.10

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, à tout point M donc à tout couple (x, y), on associe ses coordonnées polaires (r,θ). Les relations qui lient x, y, r,θ, sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{array}\right. \quad r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0,2\pi[.$$

L'application précédente qui à (r,θ) associe le point M est bijective de $\mathbb{R}_*^+ \times [0,2\pi[$ dans le plan privé de l'origine.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O, à tout point M donc à tout couple (x, y, z) , on associe ses coordonnées cylindriques (r,θ, z), les relations qui lient x, y, z, r,θ sont :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{array}\right. , \; r \in \mathbb{R}^+, \theta \in [0,2\pi[$$

Voir la figure II.1.

L'application précédente qui à (r,θ, z) associe le point M est bijective de $\mathbb{R}_*^+ \times [0,2\pi[\times\mathbb{R}$ dans l'espace privé de l'axe Oz.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

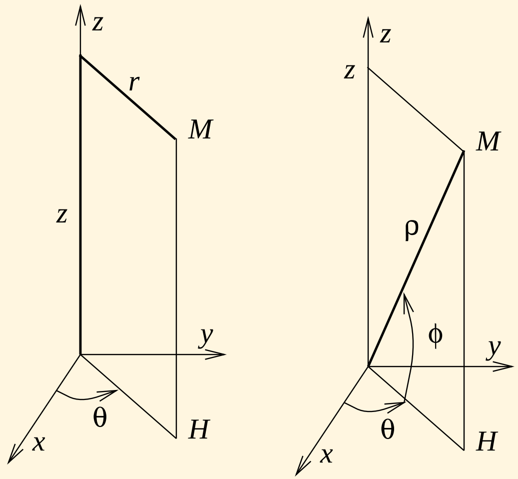


FIGURE 2.1.1 – coordonnées cylindriques et sphériques

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O, à tout point M donc à tout couple (x, y, z), on associe les coordonnées sphériques (ρ,θ,ϕ), les relations qui lient $x, y, z, \rho,\theta,\phi$, sont :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi\cos\theta \\ y = \rho\cos\phi\sin\theta \quad \rho\in\mathbb{R}^+, \phi\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right], \theta\in[0,2\pi[, \\ z = \rho\sin\phi \end{cases}$$

ϕ est l'angle latitude, θ est l'angle longitude. Voir la figure II.1.

L'application précédente qui à (r,θ,ϕ) associe le point M est bijective de $\mathbb{R}^+_* \times [0,2\pi[\times]0,\pi/2[$ dans l'espace privé de l'axe Oz.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut remplacer la latitude ϕ par la co-latitude ψ, ces 2 angles sont compémentaires : $\psi + \phi = \frac{\pi}{2}$, on a donc les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho \sin\psi \cos\theta, \\ y = \rho \sin\psi \sin\theta, \quad \rho \in \mathbb{R}^+, \psi \in [0,\pi], \theta \in [0,2\pi[. \\ z = \rho \cos\psi, \end{array}\right.$$

2.2 Vecteur gradient

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.1 Définition et propriétés du gradient

Exercices :
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12

Définition 2.2.1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ différentiable, on appelle vecteur gradient de f et on note $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, le champ de vecteurs dont les composantes sont données par :*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}, \text{ on note également } \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) = \vec{\nabla} f(M)$$

On a défini le vecteur gradient d'une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^3$, on pourrait bien sûr définir de façon similaire le gradient d'une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et de façon plus générale sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.2.1. *Si α est une constante réelle, si f et g sont deux fonctions différentiables, on a :*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha f) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} f$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Démontrer les propriétés précédentes en exercice.

2.2.2 Ensembles iso-valeurs

Exercices :
Exercice A.1.13

On verra dans le chapitre "Courbes et surfaces" que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, si c est une constante, alors le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ dont l'équation est $f(x, y) = c$ est une courbe appelée courbe iso-valeurs. Par exemple si $f(x, y) = x^2 + y^2$, si c est positive, la courbe est un cercle centré en O. Dans la pratique selon ce que représente la fonction f, la courbe iso-valeur est une isotherme, une équipotentielle, une courbe de niveau,etc.... On démontrera dans le chapitre "Courbes et surfaces " la proposition importante suivante :

Proposition 2.2.2. *Si f est une fonction de 2 variables différentiable, si $\mathscr{C}$ est la courbe iso-valeurs dont l'équation est : $f(x, y) = c$, si M_0 est un point de $\mathscr{C}$ alors $\overrightarrow{grad} f(M_0)$ (s'il n'est pas nul) est orthogonal à la courbe $\mathscr{C}$ en M_0.*

Un vecteur est orthogonal à une courbe en un point si ce vecteur est orthogonal au vecteur tangent à la courbe en ce point.
La proposition précédente peut être généralisée au cas des fonctions de n variables, en particulier dans le cas $n = 3$, l'ensemble d'équation $f(x, y, z) = c$ est une surface de $\mathbb{R}^3$, on a la proposition :

Proposition 2.2.3. *Si f est une fonction de 3 variables différentiable, si $\mathscr{S}$ est la surface iso-valeurs dont l'équation est : $f(x, y, z) = c$, si M_0 est un point de $\mathscr{S}$ alors $\overrightarrow{grad} f(M_0)$ (s'il n'est pas nul) est orthogonal à la surface $\mathscr{S}$ en M_0.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Un vecteur est orthogonal à une surface en un point si ce vecteur est orthogonal au plan tangent à la surface en ce point.

On peut compléter les propositions II.2.2, II.2.3 par un résultat très important en optimisation :

Proposition 2.2.4. *Le vecteur $\overrightarrow{grad} f$, s'il n'est pas nul, est "dirigé suivant les valeurs croissantes" de f.*

Démonstration.– Avant de démontrer cette proposition, on peut l'illustrer avec l'exercice A.1.11, les surfaces iso-valeurs sont des sphères, la constante c est alors le carré du rayon, le vecteur gradient en M_0 est dirigé vers les sphères de rayon plus grand.
Posons $\vec{V} = \overrightarrow{grad} f(M_0)$ et examinons alors la fonction :

$$\begin{aligned}\phi(t) &= f(M_0 + t\vec{V})\\ &= f(x_0 + t\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), y_0 + t\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), z_0 + t\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)).\end{aligned}$$

Les règles de dérivation d'une fonction composée donnent :

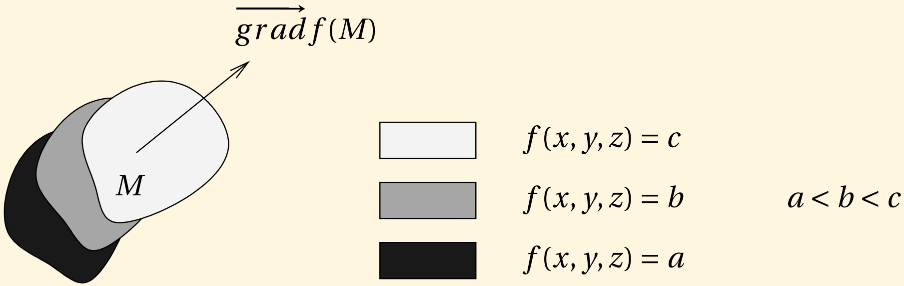
$$\begin{aligned}\phi'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}$$

Donc $\phi'(0) > 0$. Donc pour t positif assez petit $\phi(t) > \phi(0)$, donc $f(M_0 + t\vec{V}) > f(M_0)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La proposition précédente est très importante en optimisation. De nombreux problèmes pratiques se ramènent à une minimisation d'une fonction dite fonction coût, cette fonction dépend en général de plusieurs variables (le nombre peut être très grand).Dans le cas de problèmes complexes faisant intervenir un grand nombre de variables, il n'est pas possible de calculer une solution exacte. On a alors recours à des méthodes numériques, parmi celles-ci certaines sont appelées méthodes du gradient. Elles utilisent en particulier la propriété énoncée dans la proposition II.2.4.



Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.3 Gradient en coordonnées polaires et cylindriques

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15
Exercice A.1.16
Exercice A.1.17

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ différentiable, si le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, le vecteur gradient en M est défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{\jmath}$$

Proposition 2.2.5. *Si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbb{R}^2$, différent de O, on définit une nouvelle base orthonormée du plan $(\vec{u},\vec{v})$:*
$\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}, \ \ \vec{v} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$.
Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en M, on définit la fonction g par
$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. *On a alors l'expression du gradient suivante :*

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r\cos\theta, r sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}$$

De façon similaire on obtient l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 2.2.6. *Si r, θ et z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à Oz, on définit les vecteurs*
$\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$, $\vec{v} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$
Si f est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en M, on définit la fonction g par $g(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. On a alors l'expression du gradient suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z)\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,z)\vec{v} + \frac{\partial g}{\partial z}(r,\theta,z)\vec{k}$$

Démontrer les propositions précédentes en exercice.

On utilise les expressions précédentes lorsque la fonction g est plus simple que la fonction f.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.3 Vecteur rotationnel

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.3.1 Définition et propriétés du vecteur rotationnel

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19

Définition 2.3.1. *Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs dont les composantes P, Q, R sont des fonctions différentiable sur $\mathbb{R}^3$, on dit que $\vec{V}$ est différentiable.*

On appelle rotationnel de $\vec{V}$ et on note $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}$, le champ de vecteurs dont les composantes sont données par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) - \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) - \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3.1. *Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, on a les relations :*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}_1) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}_2),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\alpha\vec{V}) = \alpha\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{V}) = f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \wedge \vec{V}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démontrer ces propriétés en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.3.2 Exemple et interprétation du rotationnel

Exercices :
Exercice A.1.20

On remarque bien sûr immédiatement le terme rotation dans le mot rotationnel. Quel est le lien ?
Soit $M(t)$ un point d'un solide en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω. Cela signifie que si l'on note r, θ, z les coordonnées cylindriques de $M(t)$, r, z sont constants et l'angle θ varie en fonction du temps t, on a $\theta'(t) = \omega$. La position du point $M(t)$ est donc donnée par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\theta(t) = x \\ r\sin\theta(t) = y \\ z \end{pmatrix},$$

le champ de vecteurs vitesse, au point $M(t)$ est donné par :

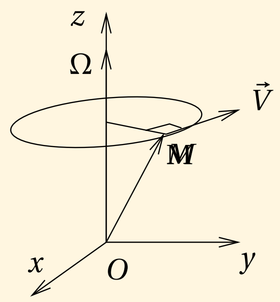
$$\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} r\omega(-\sin\theta(t)) \\ r\omega\cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si on note $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantanée, c'est à dire

$$\vec{\Omega} = \omega\vec{k}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



On retrouve le résultat connu liant le vecteur vitesse et le vecteur vitesse instantanée :

$$\vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

En introduisant le rotationnel, on trouve la relation supplémentaire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 2\vec{\Omega}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.3.3 Champ dérivant d'un potentiel

Exercices :
Exercice A.1.21
Exercice A.1.22
Exercice A.1.23

Exemples :
Exemple B.1

Documents :
Document C.1

Théorème 2.3.1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées partielles secondes sont continues, alors* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0}$

Démontrer ce théorème en exercice.

On va maintenant énoncer la réciproque du théorème précédent.

Théorème 2.3.2. *Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ dont les composantes P, Q, R admettent des dérivées partielles premières continues, supposons que le rotationnel de $\vec{V}$ soit nul, alors il existe une fonction f, définie à une constante additive près, qui vérifie* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{V}$

Vous pouvez lire en document la démonstration de l'existence d'une fonction f qui vérifie $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{V}$.

Supposons que f et g sont 2 fonctions différentiables qui vérifient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g = \vec{V},$$

on montre en exercice que $f - g = c$ où c est une constante.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Définition 2.3.2. *On dit que le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive du potentiel f, s'il existe une fonction f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$*

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel est donc $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$.

Pour le calcul du potentiel, aller consulter l'exemple proposé.

2.4 Divergence d'un champ de vecteurs

2.4.1 Divergence d'un champ de vecteurs

Exercices :
Exercice A.1.24
Exercice A.1.25

Définition 2.4.1. *Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs dont les composantes P, Q, R sont différentiables, on définit la fonction divergence par :*

$$\operatorname{div}\vec{V}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

Attention la divergence d'un champ de vecteurs est un scalaire.

Proposition 2.4.1. *Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, on a les relations :*

$$\operatorname{div}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \operatorname{div}(\vec{V}_1) + \operatorname{div}(\vec{V}_2),$$

$$\operatorname{div}(\alpha\vec{V}) = \alpha\operatorname{div}(\vec{V}),$$

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f\operatorname{div}(\vec{V}) + \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot \vec{V}$$

$$\operatorname{div}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{V}_2$$

Démontrer les propriétés précédentes en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.4.2 Champ dérivant d'un potentiel vecteur

Exercices :
Exercice A.1.26

Cours :
Potentiel scalaire

Théorème 2.4.1. *Soit $\vec{A}$ un champ de vecteurs deux fois continûment différentiable, alors* $\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = 0$

Démontrer ce théorème en exercice.

On va maintenant énoncer la réciproque du théorème précédent.

Théorème 2.4.2. *Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ dont les composantes P, Q, R admettent des dérivées partielles premières continues, supposons que* $\mathrm{div}\vec{V}$ *soit nul, alors il existe un champ de vecteurs $\vec{A}$ qui vérifie* $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{V}$

On admettra ce théorème.

Définition 2.4.2. *On dit que le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur, s'il existe un champ de vecteurs $\vec{A}$ deux fois continûment différentiable qui vérifie*

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur est donc $\mathrm{div}\vec{V} = 0$.

ATTENTION : ne confondez pas le potentiel (scalaire) que l'on a défini précédemment et le potentiel vecteur que l'on définit maintenant.

2.5 Laplacien d'une fonction

2.5.1 Définition et propriétés du laplacien

Exercices :
Exercice A.1.27
Exercice A.1.28

Définition 2.5.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ qui admet des dérivées partielles secondes, on définit la fonction laplacien par :*

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M)$$

Proposition 2.5.1. *Si α est une constante réelle, si f et g sont deux fonctions qui admettent des dérivées partielles secondes, on a :*

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$$

$$\Delta(\alpha f) = \alpha \Delta f$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f\, \overrightarrow{\operatorname{grad}} g - g\, \overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = f \Delta g - g \Delta f$$

Définition 2.5.2. *Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs dont les composantes P, Q, R admettent des dérivées partielles secondes, on définit le laplacien vectoriel du champ $\vec{V}$ par :*

$$\vec{\Delta}\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \Delta P(M) \\ \Delta Q(M) \\ \Delta R(M) \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 2.5.2.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{V}) - \vec{\Delta}\vec{V}.$$

Démontrer la proposition précédente en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.5.2 Expression du laplacien en coordonnées polaires et cylindriques

Exercices :
Exercice A.1.29
Exercice A.1.30

Proposition 2.5.3. *Si r, θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbb{R}^2$ ($M \neq O$), si f est une fonction de 2 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par*

$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, *on a alors l'expression du laplacien :*

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$$

Proposition 2.5.4. *Si r, θ, z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbb{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par*

$g(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, *on a alors l'expression du laplacien :*

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r,\theta,z)$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.5.3 Expression du laplacien en coordonnées sphériques

Exercices :
Exercice A.1.31
Exercice A.1.32

Des calculs similaires à ceux effectués en coordonnées polaires, mais beaucoup plus longs, permettent d'obtenir le laplacien en coordonnées sphériques :

Proposition 2.5.5. *Si ρ,θ,ϕ sont les coordonnées sphériques d'un point M de $\mathbb{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par*

$g(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\cos\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\phi)$, *on a alors l'expression du laplacien :*

$$\Delta f(\rho\cos\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\phi) = \frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2}(\rho,\theta,\phi) + \frac{2}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\theta,\phi)$$

$$+\frac{1}{\rho^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(\rho,\theta,\phi) - \frac{tan\phi}{\rho^2}\frac{\partial g}{\partial\phi}(\rho,\theta,\phi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^2}(\rho,\theta,\phi)$$

Proposition 2.5.6. *Si ρ,θ,ψ (ψ : co-latitude) sont les coordonnées sphériques d'un point M de $\mathbb{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction h par*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$h(\rho,\theta,\psi) = f(\rho\cos\theta\sin\psi, \rho\sin\theta\sin\psi, \rho\cos\psi)$,
on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(\rho\cos\theta\sin\psi, \rho\sin\theta\sin\psi, \rho\cos\psi) = \frac{\partial^2 h}{\partial\rho^2}(\rho,\theta,\psi) + \frac{2}{\rho}\frac{\partial h}{\partial\rho}(\rho,\theta,\psi)$$

$$+\frac{1}{\rho^2\sin^2\psi}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(\rho,\theta,\psi) + \frac{\cot\psi}{\rho^2}\frac{\partial h}{\partial\psi}(\rho,\theta,\psi) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\psi^2}(\rho,\theta,\psi)$$

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch2-Exercice1

Démontrer les propriétés du produit scalaire :

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = \vec{U}_2 \cdot \vec{U}_1$$

$$(\alpha \vec{U}_1) \cdot \vec{U}_2 = \alpha (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2)$$

$$\vec{U}_1 \cdot (\vec{U}_2 + \vec{U}_3) = \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 + \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3$$

$$(\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2)^2 \leq (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1)(\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_2)$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch2-Exercice2

Déterminer une équation du plan Π passant par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et perpendiculaire au vecteur $\vec{N}$ de composantes (a, b, c).On dit que le vecteur $\vec{N}$ est normal au plan Π.

Solution

Exercice A.1.3 Ch2-Exercice3

On définit le plan Π passant par le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et perpendiculaire au vecteur $\vec{N}$. Soit M_1 un point de coordonnées (x_1, y_1, z_1), montrer que la distance de M_1 à Π vaut
$$\frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

Solution

Exercice A.1.4 Ch2-Exercice4

Démontrer les propriétés du produit vectoriel :

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = -\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_1,$$

$$(\alpha\vec{U}_1) \wedge \vec{U}_2 = \alpha(\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2)$$

$$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 + \vec{U}_3) = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 + \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_3$$

Solution

Exercice A.1.5 Ch2-Exercice5

1. Montrer que :$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) = \alpha \vec{U}_2 + \beta \vec{U}_3$
2. Effectuer le produit scalaire avec $\vec{U}_1$ et en déduire que $\alpha = \lambda \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3, \beta = -\lambda \vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2$
3. Calculer la première composante de $\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3)$ et en déduire λ.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch2-Exercice6

Montrer que $\|\vec{U} \wedge \vec{V}\|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, on pourra s'aider d'une figure.

Solution

Exercice A.1.7 Ch2-Exercice7

Soit D la droite qui passe par le point M_0 et qui a pour vecteur directeur non nul $\vec{V}$, montrer que la distance d'un point M_1 à D est égale à $\dfrac{\|\overrightarrow{M_0M_1} \wedge \vec{V}\|}{\|\vec{V}\|}$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch2-Exercice8

Montrer que la valeur absolue du produit mixte est égale au volume du parallépipède construit sur $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$.

Solution

Exercice A.1.9 Ch2-Exercice9

1. Soient M_1, M_2, M_3 3 points non alignés de coordonnées respectives $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$, déterminer une équation du plan passant par ces 3 points.
2. Application : $(x_1, y_1, z_1) = (0,2,1), (x_2, y_2, z_2) = (1,0,1), (x_3, y_3, z_3) = (0,0,-1)$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch2-Exercice10

Soit $M \in \mathbb{R}^3$, on appelle (r,θ,z) les coordonnées cylindriques et (ρ,θ,ϕ) les coordonnées sphériques. Rappeler les relations permettant d'obtenir (x,y,z) en fonction de ces coordonnées. Exprimer r et ρ à l'aide de x,y,z

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch2-Exercice11

On définit $f(x,y,z) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$, calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$.
Tracer la sphère de centre (x_0, y_0, z_0) qui passe par M et le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M)$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch2-Exercice12

Si α est une constante réelle, si f et g sont deux fonctions différentiables, montrer les propriétés :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f+g) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\alpha f) = \alpha \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch2-Exercice13

1. Reprendre l'exercice A.1.11 et vérifier le résultat des propositions II.2.3 et II.2.4.
2. Donner l'équation d'un plan sous la forme $f(x, y, z) = c$, calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$. Comparer avec ce qui a été montré dans l'exercice. A.1.2

Solution

Exercice A.1.14 Ch2-Exercice14

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit $M \neq O$ le point du plan dont les coordonnées polaires sont r,θ, on définit $\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$, $\vec{v} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$.

Représenter sur une figure le point M et les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$.

Solution

Exercice A.1.15 Ch2-Exercice15

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbb{R}^2$, différent de O, on définit les vecteurs
$\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath},\ \ \vec{v} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$.
Si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en M, on définit la fonction g par
$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Montrer que le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{v}$$

Pour ce faire on pourra utiliser les règles de dérivation des fonctions composées pour calculer les dérivées partielles de g en fonction des dérivées partielles de f, puis en déduire les dérivées partielles de f en fonction de celles de g et enfin remplacer dans l'expression du gradient.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch2-Exercice16

On définit $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2}$. Montrer que le vecteur gradient en M est colinéaire avec $\overrightarrow{OM}$.

Solution

Exercice A.1.17 Ch2-Exercice17

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Si r, θ et z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à Oz, on définit les vecteurs

$\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}, \ \ \vec{v} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, différentiable en M, on définit la fonction g par $g(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

Représenter sur une figure le point M et les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{u}, \vec{v}$.

Montrer l'expression du gradient suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z)\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,z)\vec{v} + \frac{\partial g}{\partial z}(r,\theta,z)\vec{k}$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch2-Exercice18

Soit $\vec{V} = (x^2yz, x^3z, x^2 + y^2)$, calculer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}$

Solution

Exercice A.1.19 Ch2-Exercice19

Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables,démontrer les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}_1) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}_2),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\alpha \vec{V}) = \alpha \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f \vec{V}) = f\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \wedge \vec{V}$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch2-Exercice20

Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = 2\omega\vec{k}$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch2-Exercice21

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées partielles secondes sont continues, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{0}$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch2-Exercice22

Montrer que si f et g sont 2 fonctions différentiables qui vérifient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \overrightarrow{\text{grad}}\, g$, alors $f - g = c$ où c est une constante.

Solution

Exercice A.1.23 Ch2-Exercice23

Montrer que le champ de vecteur $\vec{V} = (y, \quad x+z, \quad y+2z)$ dérive d'un potentiel, calculer ce potentiel.(réponse : $f(x,y,z) = xy + zy + z^2 + c$)

Solution

Exercice A.1.24 Ch2-Exercice24

On définit le champ de vecteurs de composantes $\vec{V} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ où α est une constante. Calculer div$\vec{V}$, représenter le champ de vecteurs pour $\alpha > 0$, puis pour $\alpha < 0$. Pouvez-vous en déduire une interprétation géométrique de la divergence.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch2-Exercice25

Si f est une fonction différentiable, si α est une constante, si $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ sont des champs de vecteurs différentiables, montrer les relations suivantes :

$$\mathrm{div}(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \mathrm{div}(\vec{V}_1) + \mathrm{div}(\vec{V}_2),$$

$$\mathrm{div}(\alpha \vec{V}) = \alpha \mathrm{div}(\vec{V}),$$

$$\mathrm{div}(f \vec{V}) = f \mathrm{div}(\vec{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \vec{V}$$

$$\mathrm{div}(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{V}_1 - \vec{V}_1 \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{V}_2$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch2-Exercice26

Montrer que si le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$, alors $\mathrm{div}\vec{V} = 0$.

Solution

Exercice A.1.27 Ch2-Exercice27

Si α est une constante réelle, si f et g sont deux fonctions qui admettent des dérivées partielles secondes, démontrer les propriétés suivantes :

$$\Delta(f+g)=\Delta f+\Delta g$$

$$\Delta(\alpha f)=\alpha\Delta f$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f)=\Delta f$$

$$\operatorname{div}(f\overrightarrow{\operatorname{grad}}g-g\overrightarrow{\operatorname{grad}}f)=f\Delta g-g\Delta f$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Ch2-Exercice28

Montrer que :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{V}) - \vec{\Delta}\vec{V}.$$

Solution

Exercice A.1.29 Ch2-Exercice29

Si r, θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbb{R}^2$ $(M \neq O)$, si f est une fonction de 2 variables qui admet des dérivées secondes continues, on définit la fonction g par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Exprimer les dérivées partielles premières de g à l'aide des dérivées partielles de f.
2. En déduire que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = g_1(r,\theta),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = g_2(r,\theta)$$

3. Calculer les dérivées partielles de g_1, g_2 par rapport à r et θ à l'aide des dérivées partielles de g.
4. En déduire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
5. En déduire l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch2-Exercice30

Si r, θ, z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbb{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes continues, si on définit la fonction g par $g(r,\theta,z) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$, montrer alors que l'on a l'expression du laplacien :

$$\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta,z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r,\theta,z)$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.31 Ch2-Exercice31

1. Dans le plan on définit la fonction suivante pour $(x, y) \neq (0,0)$:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   (a) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées cartésiennes .

   (b) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées polaires

2. Dans l'espace on définit la fonction suivante pour $(x, y, z) \neq (0,0,0)$:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

   (a) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées cartésiennes.

   (b) Calculer le laplacien de f en utilisant les coordonnées sphériques

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.32 Ch2-Exercice32

Utiliser la proposition II.5.5, pour démontrer la proposition II.5.6.

Solution

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 petit formulaire

On suppose les fonctions ($f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) et les champs de vecteurs ($A, B, C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) suffisamment réguliers. Démontrer les formules suivantes.

(0) $A \wedge (B \wedge C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$

(1) $\mathrm{grad}(fg) = f\,\mathrm{grad}\,g + g\,\mathrm{grad}\,f$

(2) $\mathrm{div}(fA) = f\,\mathrm{div}\,A + A \cdot \mathrm{grad}\,f$

(3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,f) = \Delta f$

(4) $\mathrm{div}(f\,\mathrm{grad}\,g - g\,\mathrm{grad}\,f) = f\Delta g - g\Delta f$

(5) $\mathrm{rot}(fA) = f\,\mathrm{rot}\,A + \mathrm{grad}\,f \wedge A$

(6) $\mathrm{div}(A \wedge B) = B \cdot \mathrm{rot}\,A - A \cdot \mathrm{rot}\,B$

(7) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,A) = 0$

(8) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,A) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,A) - \overrightarrow{\Delta}\,A$

(9) $\mathrm{rot}(A \wedge B) = A\mathrm{div}(B) - B\mathrm{div}(A) + (B \cdot \mathrm{grad})A - (A \cdot \mathrm{grad})B$

(10) $\mathrm{grad}(A \cdot B) = A \wedge \mathrm{rot}\,B + B \wedge \mathrm{rot}\,A + (B \cdot \mathrm{grad})A + (A \cdot \mathrm{grad})B$

Sauf mention contraire, ces formules seront désormais utilisées sans justification.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 gradient dans $\mathbb{R}^2$

Dans cet exercice O désigne l'origine de $\mathbb{R}^2$ et $(\vec{i}, \vec{j})$ sa base canonique. On pose $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $r = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. Calculer les composantes de grad f dans chacun des cas suivants.
   (a) $f(x, y) = r^n$, où n est un entier, $n \geq 1$
   (b) $f(x, y) = \ln r$
   (c) $f(x, y) = \frac{1}{r}$
2. Montrer que si f est une fonction ne dépendant que de r (on dit que f est radiale, et on notera $f(x, y) = f(r)$), alors
$$\mathrm{grad} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$$
   Retrouver les résultats obtenus ci-dessus.
3. Résoudre $\mathrm{grad}\psi(r) = 3r^5\overrightarrow{OM}$
4. Trouver $\Phi = \Phi(r)$ solution de
$$\begin{cases} \mathrm{grad}\Phi & = & \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r^3} \\ \Phi(2) & = & 1 \end{cases}$$
5. On considère (dans $\mathbb{R}^3$) un dipole électrique de charge q, de taille a, centré en 0 et d'axe Ox (il s'agit donc d'une charge $-q$ placée en $(-a/2, 0, 0)$ et d'une charge q placée en $(a/2, 0, 0)$). On observe une magnifique symétrie d'axe Ox, il suffit donc d'observer ce qui se passe dans

Exercice A.2.2
gradient dans $\mathbb{R}^2$

un plan contenant cet axe, on choisit le plan $z = 0$ comme d'hab. Un point M dans ce plan sera repéré par deux coordonnées uniquement $M = (x, y)$. Le potentiel à grande distance peut s'écrire (c'est une bonne approximation lorsque $r = |OM|$ est très grand devant a)

$$f(M) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(a) Déterminer les composantes E_r et E_θ dans le repère polaire du champ électrique $E(M) = -\mathrm{grad}\, f(M)$ créé par ce dipole.

(b) En déduire l'expression de E dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$.

(c) Retrouver ce résultat directement à partir de l'expression de f en coordonnées cartésiennes.

Exercice A.2.3 opérateur aux dérivées partielles intervenant en physique

1. Soient deux fonctions

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto g(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

   (a) Calculer Δf et Δg en utilisant les coordonnées cartésiennes.

   (b) Calculer Δf en utilisant les coordonnées polaires, et Δg en utilisant les coordonnées cylindriques.

   (c) Calculer Δg en utilisant les coordonnées sphériques.

   On fera une figure illustrant les différents systèmes de coordonnées.

2. On dit qu'un champ de vecteurs est solénoïdal si sa divergence est nulle. Trouver toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiables et telles que

$$\begin{cases} \left|\operatorname{grad} g(r)\right| = 5 \text{ au point } (-1,1,0) \\ g(r)\overrightarrow{OM} \text{ solénoïdal} \end{cases}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. Exprimer l'équation de la chaleur
$$\Delta u = \frac{1}{k^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$
en coordonnées sphériques ($u(M,t)$ est une fonction de 4 variables représentant la température au point $M \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$). Considérer le cas où u ne dépend ni de r ni de t (cas 1), puis le cas où u ne dépend ni de θ, ni de ϕ (cas 2).

4. Exprimer l'équation de Maxwell
$$\mathrm{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$
en coordonnées sphériques ($E(M,t)$ et $B(M,t)$ sont deux champs de vecteurs dépendant du temps t, ou autrement dit, deux fonctions de 4 variables à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, représentant respectivement le champ électrique et l'impulsion magnétique au point $M \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$). Que se passe-t-il si H est constant et E ne dépend que de r ?

5. On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ est harmonique si son laplacien est nul.
   (a) Déterminer toutes les fonctions harmoniques à variables séparées, c'est-à-dire du type $u(x,y) = f(x)g(y)$.
   (b) Montrer que la recherche des fonctions harmoniques à variables séparées en coordonnées polaires $u(r,\theta) = f(r)g(\theta)$ conduit à l'équation de Bessel (où $n \in \mathbb{N}$).
$$r^2 f'' + r f' - n^2 f = 0$$

Exercice A.2.3
opérateur aux dérivées partielles intervenant en physique

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 champs et potentiels

Soit $c \in \mathbb{R}^3$. On considère le champ scalaire

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & u(M) = c \cdot \operatorname{grad} \dfrac{1}{r} \end{array}$$

où $r = |M| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Vérifier que

$$\operatorname{grad} u = -\frac{1}{r^3} c + 3 \frac{c \cdot \overrightarrow{OM}}{r^5} \overrightarrow{OM}$$

2. Monter que le champ $\operatorname{grad} u$ est à divergence nulle.
3. En déduire que $\operatorname{grad} u$ dérive d'un potentiel vecteur W qu'on cherchera sous la forme $W = f(r)(c \wedge \overrightarrow{OM})$ (et il faut donc déterminer $f(r)$).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 champs et potentiels

On considère le champ de vecteur

$$\begin{array}{rcl} V:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ M & \longmapsto & V(M)=\begin{pmatrix} \dfrac{x}{1+r^2} \\ \dfrac{y}{1+r^2}+\beta y^2 z \\ \dfrac{\alpha z}{1+r^2}+\beta y^3/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et où on a posé $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. Montrer que
$$\forall \beta\in\mathbb{R},\qquad \operatorname{rot} V=0 \Longleftrightarrow \alpha=\alpha_0$$
où α_0 est une constante à déterminer.
2. On prend $\alpha=\alpha_0$. En déduire que V dérive d'un potentiel et déterminer $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ pour que $V=\operatorname{grad} f$.
3. On pose $\beta=0$. Calculer Δf.
4. Retrouver le résultat précédent à l'aide de l'expression de Δf en coordonnées sphériques.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 champs et potentiels

1. Montrer que le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} V:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ M & \longmapsto & V(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{-xz}{r^3} \\ \dfrac{-yz}{r^3} \\ \dfrac{1}{r} - \dfrac{z^2}{r^3} \end{pmatrix} \end{array}$$

dérive d'un potentiel qu'on déterminera.

2. On considère le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} U:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ M & \longmapsto & U(M) = \begin{pmatrix} 2xz \\ -2yz \\ -(x^2-y^2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Déterminer $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour que le champ de vecteur $V(M) = \phi(z)U(M)$ dérive d'un potentiel qu'on déterminera.

3. Montrer que le champ de vecteurs $W = \frac{\overrightarrow{OM}}{r^3}$ dérive d'un potentiel qu'on déterminera.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 champs et potentiel vecteur

On considère le champ de vecteurs

$$\begin{array}{rcl} V:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ M & \longmapsto & V(M)=\begin{pmatrix} 2y+z \\ 2x+z \\ x+y \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe un champ de vecteur $A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $V = \mathrm{rot} A$.
2. On cherche un tel champ A sous la forme

$$\begin{array}{rcl} A:\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ M & \longmapsto & A(M)=\begin{pmatrix} x(2z-y) \\ y\phi(x,z) \\ z\psi(x,y) \end{pmatrix} \end{array}$$

   Déterminer la forme générale des fonctions ϕ et ψ pour que $V = \mathrm{rot} A$.
3. On impose de plus $\mathrm{div} A = 0$ (une telle condition supplémentaire s'appelle condition de jauge). Déterminer ϕ et ψ.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8

On définit dans le plan (xoy) l'ensemble

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in [-1, 1] \times [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \mid x^6 + 9x^{10} + y^4 + 3y^2 - 10 = 0\right\}$$

1. Pour tout point $(x_0, y_0) \in \Gamma$, donner une équation de la droite tangente en ce point.

2. En quels points de Γ, la droite tangente est-elle parallèle à l'axe (Ox) ?

3. Donner la direction de la droite tangente aux points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

Exemple B.1 Calcul pratique d'un potentiel

Soit le champ de vecteurs défini par : $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2xyz^3 + \cos y \\ x^2z^3 - x\sin y + e^z \\ 3x^2yz^2 + ye^z \end{pmatrix}$.

On vérifie que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{0}$, donc le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel f que nous allons calculer maintenant.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz^3 + \cos y \Longrightarrow f(x,y,z) = x^2yz^3 + x\cos y + f_1(y,z)$$

On procède comme pour le calcul de primitives de fonctions d'une variable, ici y, z jouent le rôle de paramètres et bien sûr la "constante" additive est une fonction de y, z. On tient compte de ce premier résultat dans la suite des calculs.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2z^3 - x\sin y + e^z = x^2z^3 - x\sin y + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y,z) \Longrightarrow f_1(y,z) = ye^z + f_2(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3x^2yz^2 + ye^z = 3x^2yz^2 + ye^z + f_2'(z) \Longrightarrow f_2(z) = c$$

On a donc obtenu :

$$f(x,y,z) = x^2yz^3 + x\cos y + ye^z + c$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

Document C.1 document1

On va démontrer le théorème suivant :

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ dont les composantes P, Q, R admettent des dérivées partielles premières continues, supposons que $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$, alors il existe une fonction f qui vérifie $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{V}$

Démonstration.– Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{0}$, on a : $\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

Soient x_1, y_1, z_1 des constantes, on définit la fonction f de la façon suivante :

$$f(x, y, z) = \int_{x_1}^{x} P(\xi, y, z)\, d\xi + \int_{y_1}^{y} Q(x_1, \eta, z)\, d\eta + \int_{z_1}^{z} R(x_1, y_1, \zeta)\, d\zeta$$

La fonction f est bien définie en effet puique P, Q, R ont des dérivées partielles premières continues, elles sont différentiables donc continues donc leurs applications partielles sont continues, chacune des intégrales est donc définie. On peut remarquer que le premier terme de f dépend de x, y, z, le deuxième terme de f dépend de y, z, le troisième terme de f dépend de z.On obtient les

Document C.1
document1

dérivées partielles de f :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= P(x,y,z)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(\xi,y,z)\,d\xi + Q(x_1,y,z)\\
&= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(\xi,y,z)\,d\xi + Q(x_1,y,z)\\
&= Q(x,y,z) - Q(x_1,y,z) + Q(x_1,y,z) = Q(x,y,z),\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial P}{\partial z}(\xi,y,z)\,d\xi + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial Q}{\partial z}(x_1,\eta,z)\,d\eta + R(x_1,y_1,z)\\
&= \int_{x_1}^{x} \frac{\partial R}{\partial x}(\xi,y,z)\,d\xi + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial R}{\partial y}(x_1,\eta,z)\,d\eta + R(x_1,y_1,z)\\
&= R(x,y,z) - R(x_1,y,z) + R(x_1,y,z) - R(x_1,y_1,z) + R(x_1,y_1,z) = R(x,y,z).
\end{aligned}
$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

R

V

Solution de l'exercice A.1.1

Pour les 3 premières propriétés, il suffit d'utiliser la définition du produit scalaire avec les composantes, pour la quatrième, utiliser le fait que $|\cos\theta| \leq 1$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

Faites une figure.

$$M \in \Pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0 M} \cdot \vec{N} = 0,$$

donc l'équation du plan est :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

Faites une figure.

Ecrire l'expression du produit scalaire utilisant le cosinus de l'angle α entre les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\vec{N}$.

$$\delta = \|\overrightarrow{M_0M_1}\||\cos\alpha| = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.4

Utiliser la définition du produit vectoriel avec les composantes des vecteurs.

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

1. $\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3)$ est perpendiculaire à $\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3$, donc appartient au plan $\vec{U}_2, \vec{U}_3$.
2. $(\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3)) \cdot \vec{U}_1 = 0$. donc

$$\alpha \vec{U}_2 \cdot \vec{U}_1 + \beta \vec{U}_3 \cdot \vec{U}_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\vec{U}_3 \cdot \vec{U}_1} = -\frac{\beta}{\vec{U}_2 \cdot \vec{U}_1} = \lambda$$

3. On a montré dans la question précédente que

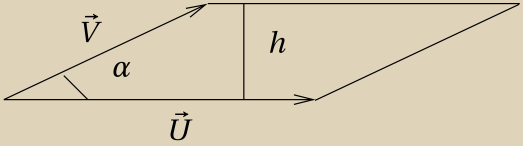
$$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) = \lambda((\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3)\vec{U}_2 - (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2)\vec{U}_3)$$

Il suffit donc de calculer la première composante de l'un et l'autre des vecteurs pour en déduire λ.
On obtient :

$$\vec{U}_1 \wedge (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) = (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_3)\vec{U}_2 - (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2)\vec{U}_3.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.6



$$A = h\|\vec{U}\|, \;\; h = \|\vec{V}\|\,|\sin\alpha|$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

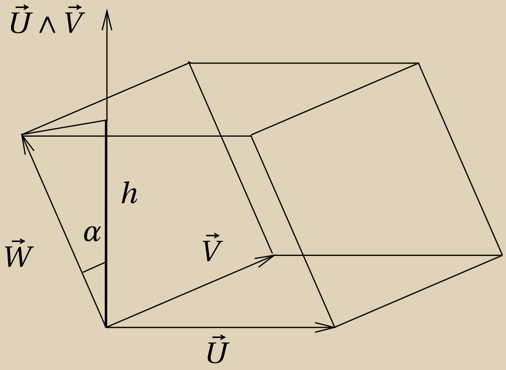
Faites une figure, si θ est l'angle entre $\overrightarrow{M_0 M_1}$ et $\vec{V}$:

$$\delta = \|\overrightarrow{M_0 M_1}\| |\sin\theta|$$

D'où le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8



Le volume est égal à l'aire d'une base multipliée par la hauteur correspondante : $v = a \times h$
On utilise les propriétés du produit vectoriel, l'aire a de la base construite sur $\vec{U}$ et $\vec{V}$, vaut $a = \left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\|$.

La hauteur h vaut $\left\|\vec{W}\right\| \times |cos\alpha|$, où α est l'angle entre $\vec{W}$ et un vecteur normal à la base, on peut choisir comme vecteur normal $\vec{U} \wedge \vec{V}$.
On a donc obtenu : $v = \left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\| \times \left\|\vec{W}\right\| \times |cos\alpha| = |(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}|$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

1.
$$M \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \text{ sont coplanaires}$$

   donc
$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$$

   Si (a, b, c) sont les composantes de
$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3},$$

   l'équation du plan est
$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

2. On vérifie bien que les 3 points ne sont pas alignés puisque $\overrightarrow{M_1M_2}$ n'est pas proportionnel à $\overrightarrow{M_1M_3}$
$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} = (4, 2, -2)$$

   D'où une équation du plan est
$$2x + (y - 2) - (z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - z - 1 = 0$$

   Pour détecter vos erreurs de calcul éventuelles vérifiez bien que les coordonnées de M_1, M_2, M_3 sont solutions de l'équation trouvée.

Retour à l'exercice ▲

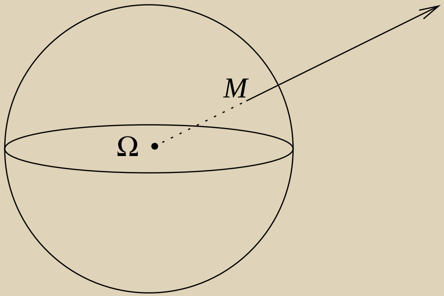
Solution de l'exercice A.1.10

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \; r \in \mathbb{R}^+, \; \theta \in [0, 2\pi[, \; z \in \mathbb{R}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \begin{cases} x = \rho\cos\phi\cos\theta \\ y = \rho\cos\phi\sin\theta \\ z = \rho\sin\phi \end{cases} \; \rho \in \mathbb{R}^+, \; \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \; \theta \in [0, 2\pi[$$

Retour à l'exercice ▲

$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = 2(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 2\overrightarrow{\Omega M}.$



Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.12

Il suffit d’utiliser les résultats sur les dérivées partielles d’une somme ou d’un produit de fonctions

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

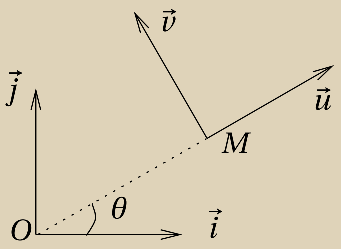
1. Le "rayon" $\overrightarrow{\Omega M}$ est orthogonal à la sphère en M. Il "pointe" vers les sphères de rayon plus grand.
2.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = c,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = (\alpha, \beta, \gamma) = \vec{N}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14



Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$$

On remplace dans l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}.$$

Retour à l'exercice ▲

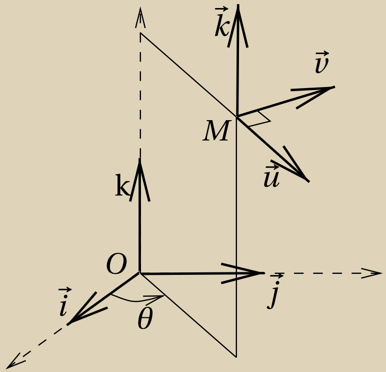
Solution de l'exercice A.1.16

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^3$$

La dérivée partielle de g par rapport à θ est donc nulle, donc le gradient de f est proportionnel à $\vec{u}$ qui est lui-même proportionnel à $\overrightarrow{OM}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17



On s'inspire de l'exercice A.1.15 pour calculer de façon similaire $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ en fonction des dérivées partielles de g.

Remplacer dans l'expression du gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.18

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = (2y - x^3,\ \ x^2 y - 2x,\ \ 2x^2 z)$$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser les règles de dérivation d'une somme ou d'un produit de fonctions, par exemple, calculons la première composante de $\vec{V}' = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{V})$:

$$\begin{aligned}
P' &= \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y,z)R(x,y,z)) - \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y,z)Q(x,y,z)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)R(x,y,z) + f(x,y,z)\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)Q(x,y,z) - f(x,y,z)\frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) \\
&= f(x,y,z)(\frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)R(x,y,z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z))Q(x,y,z)
\end{aligned}$$

On reconnaît la première composante de $f\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \wedge \vec{V}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

Appliquer la définition du rotationnel.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.21

Appliquer le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Retour à l’exercice ▲

On écrit successivement l'égalité des composantes de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ et $\overrightarrow{\text{grad}} g$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \Longleftrightarrow \frac{\partial (f-g)}{\partial x} = 0$$

Donc $f - g$ ne dépend pas de x.

On continue avec les variables y, z.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

On calcule $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$, on en déduit l'existence d'un potentiel f .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y \Rightarrow f(x,y,z) = yx + f_1(y,z)$$

Préciser l'expression précédente en traduisant que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z.$$

Continuer avec

$$\frac{\partial f}{\partial z}$$

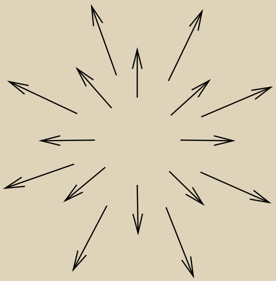
Inspirez vous de l'exemple traité dans le cours. La solution est :

$$f(x,y,z) = xy + zy + z^2 + c$$

Retour à l'exercice ▲

$$\mathrm{div}\vec{V} = 3\alpha$$

Si $\alpha > 0$ le champ "diverge".



Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

Utiliser les règles de dérivation de la somme, du produit , attention α est une constante alors que f dépend de x, y, z

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = 0$$

il suffit d'appliquer le théorème de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser les règles de dérivation de la somme, du produit , attention α est une constante alors que f et g dépendent de x, y, z

Pour la dernière égalité, calculer $\text{div}(f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g)$.

Utiliser les résultats démontrés sur $\text{div}(f\vec{V}), \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,g)$.

On obtient :

$$\text{div}(f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g) = f\Delta g + \overrightarrow{\text{grad}}\,f \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,g$$

En déduire le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

Il suffit d'appliquer les différentes définitions et de comparer le vecteur de droite et le vecteur de gauche.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

1. Revoir l'exercice A.1.15 pour le calcul des dérivés partielles de g en fonction des dérivées partielles de f
2. Il suffit de résoudre le système linéaire précédent.
3. $$\frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial\theta}(r,\theta) = -\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial r}(r,\theta) = \sin\theta\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial\theta}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \sin\theta\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)$$
4. Vous savez calculer
$$\frac{\partial f}{\partial x}$$
à l'aide de
$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial\theta}$$
Donc vous savez calculer
$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$$
à l'aide de
$$\frac{\partial g_1}{\partial r}, \frac{\partial g_1}{\partial\theta}$$
On a :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g_1}{\partial\theta}(r,\theta)$$

Il suffit maintenant de remplacer par les expressions précedemment calculées. On obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

Faire un calcul similaire pour obtenir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

5. Il suffit d'ajouter $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.30

Exprimer

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial z}$$

à l'aide de

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Résoudre le système linéaire pour obtenir

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

à l'aide de

$$\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \theta}, \frac{\partial g}{\partial z}$$

Si vous savez calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x},$$

vous savez calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

C'est la même chose que dans l'exercice A.1.30.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.31

1. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}2x = -x(x^2+y^2)^{-3/2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2}2y = -y(x^2+y^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -(x^2+y^2)^{-3/2} + \frac{3x}{2}(x^2+y^2)^{-5/2}(2x) = \frac{-x^2-y^2+3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{2x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

Calculer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en déduire

$$\Delta f = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

(b)

$$g(r,\theta) = \frac{1}{r},\ \frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{r^2},\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3},\ \Delta f = \frac{1}{r^3}$$

C'est beaucoup plus rapide !

2. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2y = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}2z = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= -(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + \frac{3x}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}(-2x) \\
&= \frac{-x^2-y^2-z^2+3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\
&= \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}
\end{aligned}$$

On calcule

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

On en déduit :

$$\Delta f = 0$$

(b)

$$g(r,\theta) = \frac{1}{r},\ \frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{1}{r^2},\ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3},\ \Delta f = 0$$

C'est beaucoup plus rapide !

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.32

$$g(\rho,\theta,\phi) = h(\rho,\theta,\frac{\pi}{2}-\phi)$$

en utilisant les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial \phi}(\rho,\theta,\phi) = -\frac{\partial h}{\partial \psi}(\rho,\theta,\frac{\pi}{2}-\phi) = -\frac{\partial h}{\partial \psi}(\rho,\theta,\psi)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(\rho,\theta,\phi) = \frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2}(\rho,\theta,\frac{\pi}{2}-\phi) = \frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2}(\rho,\theta,\psi)$$

par ailleurs les dérivées partielles de h et g par rapport à ρ et θ sont les mêmes.

Les angles ϕ et ψ sont complémentaires, les sinus et cosinus "s'échangent", d'où le résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.5

1.

$$\operatorname{rot} V = \left| \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} & = & \dfrac{2yz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}(1-\alpha) \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} & = & \dfrac{2xz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}(\alpha-1) \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right.$$

donc $\operatorname{rot} V = 0$ ssi $\alpha = 1$ pour tout β.

2. On choisit $\alpha = 1$. Comme $\operatorname{rot} V = 0$, il existe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $V = \operatorname{grad} f$.

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{x}{1+x^2+y^2+z^2} & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{y}{1+x^2+y^2+z^2} + \beta y^2 z & (2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \dfrac{z}{1+x^2+y^2+z^2} + \dfrac{\beta}{3} y^3 & (3) \end{array} \right.$$

En intégrant (1) par rapport à x (à y et z fixés)

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2} ln(1+x^2+y^2+z^2) + \lambda(y,z)$$

En reportant dans (2) :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \beta y^2 z$$

qui s'intègre (par rapport à y, à z fixé) en

$$\lambda(y,z) = \frac{\beta}{3} y^3 + \nu(z)$$

D'où $f(x,y,z) = \frac{1}{2} ln(1+x^2+y^2+z^2) + \frac{\beta}{3} y^3 + v(z)$ qu'on reporte dans (3) pour obtenir : $v'(z) = 0$ et donc $v(z) = c$ (fonction constante).
On peut donc choisir comme potentiel, toute fonction du type :

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2} ln(1+x^2+y^2+z^2) + \frac{\beta}{3} y^3 + c$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

3. On pose $\beta = 0$. On choisit $c = 0$, on a donc $f(x,y,z) = \frac{1}{2} ln(1+x^2+y^2+z^2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2} \qquad \text{(sans calcul, car c'est la première composante de V)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1+y^2+z^2-x^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

De même (rôle symétrique joué par y et z)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1+x^2-y^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{1+x^2+y^2-z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta f = \frac{3+x^2+y^2+z^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

4. $f(x,y,z) = \frac{1}{2} ln(1+r^2)$ en posant $r^2 = x^2+y^2+z^2$ (coord. sphérique)

   En coordonnées sphériques (cf cours) :

$\Delta f = \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}$ où $g(r,\theta,\phi) = \frac{1}{2} ln(1+r^2)$ (indépendant de θ et ϕ ici)
$g'(r) = \frac{r}{1+r^2}$, $g''(r) = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2}$. D'où :

$$\Delta f = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2} + \frac{2r}{r(1+r^2)} = \frac{3+r^2}{(1+r^2)^2}$$

Ce qui est bien le résultat obtenu au 3.

Retour à l'exercice ▲