MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

Chapitre 3 : Courbes et surfaces

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT

Chapitre 3

Courbes et surfaces

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.1 Surfaces-Généralités

3.1.1 Equation paramétrique d'une surface

Exercices :
Exercice A.1.1
Exercice A.1.2

La position d'un point sur la sphère de centre O et de rayon R est caractérisée par la donnée des 2 paramètres θ longitude et ϕ latitude.

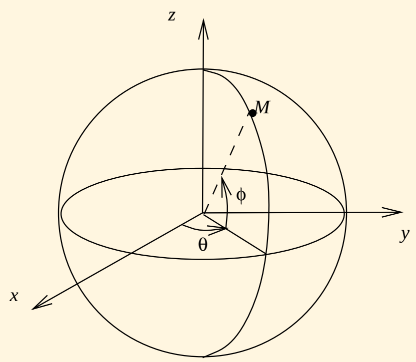
$$\left\{\begin{array}{l} x = R\cos\phi\cos\theta \\ y = R\cos\phi\sin\theta \\ z = R\sin\phi \end{array}\right. \quad , (\theta,\phi) \in \Delta = [0, 2\pi[\times [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

De façon générale une surface peut être décrite par ses équations paramétriques .

Définition 3.1.1. *Les équations paramétriques d'une surface S sont de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{l} x = a(u,v) \\ y = b(u,v) \\ z = c(u,v) \end{array}\right. \quad , (u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2.$$

Dans tous les cas, la surface est décrite par 2 paramètres.



Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.1.2 Equation cartésienne d'une surface

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4
Exercice A.1.5

On distingue 2 types d'équation cartésienne, les équations implicites et les équations explicites.

Définition 3.1.2. *On dit qu'une surface S est définie par une* **équation cartésienne implicite** *s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$$

Par exemple la sphère de centre Ω de coordonnées (a, b, c) et de rayon R a pour équation implicite $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

En effet cette équation traduit la propriété : le carré de la distance de M à Ω est égal au carré du rayon R.

Définition 3.1.3. *On dit qu'une surface S est définie par une* **équation cartésienne explicite** *s'il existe une fonction ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = \phi(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Dans la définition précédente on a exprimé explicitement z en fonction de x, y.

Bien sûr on aurait des définitions similaires en privilégiant x ou y.
L'équation explicite d'une surface n'est en fait qu'un cas particulier d'équation implicite ou d'équation paramétrique :

– A partir d'une équation explicite il est toujours possible de construire une équation implicite :

$$z = \phi(x, y) \Longleftrightarrow z - \phi(x, y) = 0.$$

La réciproque n'est pas vraie globalement, revoyez le théorème des fonctions implicites, sous certaines conditions sur f ce théorème affirme l'existence d'une fonction ϕ définie seulement localement et de plus ce théorème ne donne pas de méthode pour obtenir l'expression de ϕ à partir de celle de f.

– Une équation explicite est un cas particulier d'équations paramétriques :

$$z = \phi(x, y), (x, y) \in D \Longleftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \phi(u, v) \end{cases}, (u, v) \in D.$$

Bien sûr très souvent on ne change pas le nom et les 2 paramètres continuent de s'appeler x, y.

En revanche, le passage d'équation implicite à équations paramétriques ou équation explicite est quelquefois difficile voire impossible. Il en est de même pour le passage d'équations paramétriques à équation implicite ou équation explicite.

3.2 Courbes-Généralités

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.2.1 Equation d'une courbe du plan xOy

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On a dans ce cas 2 variables x, y. Comme pour les surfaces on a plusieurs types d'équations pour les courbes du plan xOy :

1. **Equations paramétriques** d'une courbe du plan xOy.

   Les équations paramétriques d'une courbe du plan xOy sont données par :
   $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}.$
   Par abus de notation on notera $x(t), y(t)$. Dans tous les cas une courbe est paramétrée à l'aide d'un seul paramètre.

2. **Equation cartésienne implicite** d'une courbe du plan xOy.

   On dit qu'une courbe C du plan xOy est définie par une équation cartésienne implicite s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

   $$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 0\}.$$

3. **Equation cartésienne explicite** d'une courbe du plan xOy.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On dit qu'une courbe C du plan xOy est définie par une équation cartésienne explicite s'il existe une fonction ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $C = \{(x, y), y = \phi(x)\}$.

Vous avez étudié un grand nombre de courbes données par leur équation cartésienne explicite, par exemple $y = e^x$, $y = 3x^2 + 5x + 6 \ldots$
Comme dans le cas des surfaces, l'équation cartésienne explicite est un cas particulier d'équation cartésienne implicite ou d'équation paramétrique.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.2.2 Coniques

Exercices :
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9

Le cercle fait partie de la famille des coniques. Ces courbes sont les différentes intersections possibles d'un cône avec un plan. Plusieurs cas sont possibles :

– **Ellipse** d'équation implicite

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ où } a,b \text{ sont deux réels positifs non nuls.}$$

– **Hyperbole** d'équation implicite :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ où } a,b \text{ sont deux réels positifs non nuls.} \tag{3.2.1}$$

ou

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ où } a,b \text{ sont deux réels positifs non nuls.} \tag{3.2.2}$$

Ces hyperboles ont pour asymptotes les droites d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \tag{3.2.3}$$

– **Parabole** d'équation $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$.

3.2.3 Equation d'une courbe dans l'espace

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12
Exercice A.1.13

Là encore, plusieurs types d'équation pour ces courbes :

1. **Equations paramétriques** d'une courbe de l'espace :

   Les équations paramétriques d'une courbe de l'espace sont données par :
   $$\left\{\begin{array}{l} x=\alpha(t) \\ y=\beta(t) \\ z=\gamma(t) \end{array}\right. , t\in I\subset\mathbb{R}.$$
   Par abus de notation on note $(x(t), y(t), z(t))$.
   Par exemple la courbe dont les équations paramétriques sont :
   $$\left\{\begin{array}{l} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=ct \end{array}\right.$$ où a, c, ω sont des réels fixés est une hélice circulaire.
   Comme on l'a déjà fait remarquer, une courbe est paramétrée à l'aide d'un seul paramètre.

2. **Equations cartésiennes** d'une courbe de l'espace.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Une courbe de l'espace est l'intersection de 2 surfaces. Donc une courbe de l'espace est caractérisée par 2 équations de surfaces (implicites par exemple) :

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Par exemple $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ est l'intersection de 2 plans, ce sont donc les équations cartésiennes d'une droite. Le passage entre les équations cartésiennes et les équations paramétriques d'une courbe n'est pas toujours évident.

Attention :

$y=2x$ dans l'espace est l'équation d'un plan.

$y=2x, z=0$ sont les équations d'une droite qui appartient au plan précédent.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.3 Etude des courbes

3.3.1 Vecteur tangent à une courbe

Exercices :
Exercice A.1.14

Exemples :
Exemple B.1

Soit la courbe C dont les équations paramétriques sont : $\left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right.$.

On suppose que les fonctions x, y, z sont dérivables.

On veut étudier cette courbe localement au voisinage du point M_0. On rappelle que la droite tangente à C en M_0 est la position limite de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{M_0M}$ quand M tend vers M_0 sur C. Or $\overrightarrow{M_0M}$ a pour composantes

$$(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0), z(t) - z(t_0)).$$

Ce vecteur est colinéaire au vecteur $\vec{V}$ de composantes

$$\left(\frac{(x(t) - x(t_0))}{t - t_0}, \frac{(y(t) - y(t_0))}{t - t_0}, \frac{(z(t) - z(t_0))}{t - t_0}\right).$$

La limite du vecteur $\vec{V}$ quand t tend vers t_0 est donc le vecteur $\vec{T}$ de composantes $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 3.3.1. *Soit C la courbe dont les équations paramétriques sont :*

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{array}\right. \text{, le vecteur } \vec{T} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}\text{, s'il n'est pas nul, est tangent en } M_0 \text{ à la courbe } C.$$

Ce que l'on vient de dire pour les courbes dans l'espace est vrai pour les courbes dans le plan xOy. Un vecteur tangent a alors pour composantes $(x'(t_0), y'(t_0))$. Voir l'exemple.

On verra plus loin comment déterminer un vecteur tangent dans le cas où le vecteur des dérivées premières est nul.

Vecteur tangent à une courbe

3.3.2 Etude des courbes paramétrées du plan xOy

Exercices :
Exercice A.1.15
Exercice A.1.16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ On veut étudier et représenter graphiquement une courbe du plan xOy dont les équations paramétriques sont : $\left\{\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right.$

L'étude se décompose en plusieurs étapes :

1. Etude des domaines de définition des fonction x et y : la courbe est alors définie sur l'intersection de ces 2 domaines.
2. Etude des symétries éventuelles :
   - Si la fonction x est paire et la fonction y est impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe Ox. On limite donc l'étude à l'intervalle $[0, +\infty[$, puis on effectue la symétrie.
   - Si la fonction x est impaire et la fonction y est paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy. On limite donc l'étude à l'intervalle $[0, +\infty[$, puis on effectue la symétrie.
   - Si la fonction x est paire et la fonction y est paire, l'étude sur l'intervalle $[0, +\infty[$ permet d'obtenir toute la courbe.
   - Si la fonction x est impaire et la fonction y est impaire, la courbe est symétrique par rapport à O. On limite donc l'étude à l'intervalle $[0, +\infty[$, puis on effectue la symétrie.

   Pour illustrer les propriétés précédentes faites une figure sur laquelle vous représenterez les points $M(t)$ et $M(-t)$ dans chacun des cas cités.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. Etude des variations : Si les fonctions x et y sont dérivables, on calcule leurs dérivées. On dresse un tableau de variation où figurent les signes de x', y' et les variations de x, y en fonction de t.
4. Etude des branches infinies : si lorsque t tend vers t_0 (ou vers l'infini), x ou y tend vers l'infini, on a une branche infinie. Plusieurs cas peuvent se présenter :
   - Lorsque t tend vers t_0 (ou vers l'infini), x tend vers l'infini et y tend vers y_0. On a alors une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$. La position de la courbe par rapport à l'asymptote se déduit immédiatement du tableau de variation.
   - Lorsque t tend vers t_0 (ou vers l'infini), x tend vers x_0 et y tend vers l'infini. On a alors une asymptote verticale d'équation $x = x_0$. La position de la courbe par rapport à l'asymptote se déduit immédiatement du tableau de variation.
   - Lorsque t tend vers t_0 (ou vers l'infini), x tend vers l'infini et y tend vers l'infini. Il n'est pas possible alors de conclure immédiatement. On doit effectuer une étude supplémentaire :
     - Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers l'infini, on est dans le cas d'une branche parabolique d'axe Oy ou, ce qui est équivalent, d'une branche asymptotique de direction Oy.
     - Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0, on est dans le cas d'une branche parabolique d'axe Ox ou, ce qui est équivalent, d'une branche asymptotique de direction Ox.
     - Si $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ tend vers a réel non nul, on effectue une étude supplémentaire :
       - Si $y(t) - ax(t)$ tend vers l'infini et si on appelle Δ la droite d'équation $y = ax$, on est dans le cas d'une branche parabolique d'axe Δ ou, ce qui est équivalent, d'une branche asymptotique de direction Δ.
       - Si $y(t) - ax(t)$ tend vers b, on a une asymptote d'équation $y = ax + b$. Cette fois-ci la position de la courbe par rapport à l'asymptote n'est plus immédiate, il faut étudier

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

le signe de $y(t) - ax(t) - b$.

5. Tracé de la courbe : on utilise toutes les informations recueillies précédemment. On peut également tracer les vecteurs tangents en certains points remarquables.

3.3.3 Etude locale des courbes planes paramétrées-point ordinaire

Exercices :
Exercice A.1.17

Soit t_0 un nombre appartenant au domaine de définition, on note M_0 le point du plan dont les coordonnées sont $(x(t_0), y(t_0))$, on veut tracer plus précisément la courbe C au voisinage de M_0 et en particulier déterminer un vecteur tangent à C en M_0, ainsi que la position de la courbe par rapport à ce vecteur tangent. On va supposer dans la suite que les fonctions x et y sont dérivables en t_0 autant de fois qu'on le désire.
Supposons que l'on se trouve dans le cas le plus courant, à savoir

$(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$, on pourra vérifier que dans l'exemple de l'exercice A.1.16, cette condition est vérifiée pour tous les t du domaine de définition.
On utilise la formule de Taylor au voisinage de t_0 pour les fonctions x et y.
$x(t) = x(t_0) + (t - t_0)x'(t_{0)} + (t - t_0)\varepsilon_1(t)$
$y(t) = y(t_0) + (t - t_0)y'(t_{0)} + (t - t_0)\varepsilon_2(t)$
où les fonctions ε_1 et ε_2 tendent vers 0 quand t tend vers t_0.
On note : $\overrightarrow{M_0M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix}, \vec{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}, \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0) = \begin{pmatrix} x''(t_0) \\ y''(t_0) \end{pmatrix}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Avec ces notations la formule de taylor précédente peut s'écrire :

$$\overrightarrow{M_0M}(t) = (t-t_0)\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) + (t-t_0)\vec{\varepsilon}(t) = (t-t_0)\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) + \vec{\varepsilon}(t)\right).$$

Si comme on l'a supposé $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$ alors la direction limite du vecteur $\overrightarrow{M_0M}(t)$ lorsque t tend vers t_0 est le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$, c'est donc le vecteur tangent à la courbe au point M_0. On retrouve un résultat démontré dans un paragraphe précédent.
On va étudier maintenant la position de la courbe par rapport à ce vecteur tangent. On utilise pour cela le développement de Taylor à l'ordre 2.

$$\overrightarrow{M_0M}(t) = (t-t_0)\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0) + (t-t_0)^2\vec{\varepsilon}(t).$$

Le vecteur $\vec{\varepsilon}(t)$ n'est pas le même que dans la formule de Taylor à l'ordre 1, dans la suite on notera toujours $\vec{\varepsilon}(t)$ un vecteur dont les 2 composantes tendent vers 0 quand t tend vers t_0. On suppose toujours que $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$, mais en plus on suppose que le vecteur $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)$ n'est pas colinéaire avec $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$, là encore il s'agit de la majorité des cas, vous pouvez vérifier que dans l'exemple de l'exercice A.1.16 cette condition est vérifiée pour tous les t de l'ensemble de définition. Si les vecteurs $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ et $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)$ ne sont pas colinéaires, ils forment une base du plan, il est donc possible de décomposer le vecteur $\vec{\varepsilon}(t)$ sur cette base : $\vec{\varepsilon}(t) = \varepsilon_1^*(t)\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) + \varepsilon_2^*(t)\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)$ avec

$\varepsilon_1^*(t)$ et $\varepsilon_2^*(t)$ qui sont 2 fonctions numériques qui tendent vers 0 quand t tend vers t_0. On a alors :

$$\overrightarrow{M_0M}(t) = (t-t_0)\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)\left(1+(t-t_0)\varepsilon_1^*(t)\right)+(t-t_0)^2\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_2^*(t)\right).$$

On voit rapidement que : $1+(t-t_0)\varepsilon_1^*(t)$ a pour limite 1 quand t tend vers t_0 donc pour t suffisamment près de t_0 cette expression est positive. De même : $\frac{1}{2}+\varepsilon_2^*(t)$ a pour limite $\frac{1}{2}$ quand t tend vers t_0 donc pour t suffisamment près de t_0 cette expression est positive.On peut donc en déduire que pour t suffisamment près de t_0 la composante du vecteur $\overrightarrow{M_0M}(t)$ sur le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ a le même signe que $t-t_0$ et que la composante sur le vecteur $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)$ est positive.

On obtient donc la figure III.3.1 avec $p=1$ et $q=2$.
Le cas que l'on vient de traiter est le plus répandu.
En cinématique si $x(t)$ et $y(t)$ représentent la position d'un mobile à l'instant t, ce cas correspond au cas courant : la vitesse (le vecteur dérivée première) est non nulle et l'accélération est non colinéaire à la vitesse. On retrouve alors que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et que le vecteur accélération est dirigé vers l'"intérieur" de la trajectoire. Toujours en cinématique on rencontre des cas particuliers : la vitesse peut s'annuler et alors sous l'effet de l'accélération le mobile va rebrousser chemin, ou encore l'accélération peut devenir colinéaire avec la vitesse, dans ce cas le mobile va infléchir sa course. On va maintenant expliquer tous ces cas facilement en utilisant comme précédemment la formule de Taylor.

3.3.4 Point de rebroussement, point d'inflexion

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19
Exercice A.1.20

Hypothèses

On note de façon générale $\dfrac{d^k\overrightarrow{OM}}{dt^k}(t_0) = \begin{pmatrix} x^{(k)}(t_0) \\ y^{(k)}(t_0) \end{pmatrix}$. On suppose maintenant que le premier vecteur dérivée non nul est le vecteur $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$ et que le premier vecteur dérivé non colinéaire avec le précédent est le vecteur $\dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)$.

Si on reprend l'exemple de la cinématique

- Dans le cas "courant", le vecteur vitesse est non nul : $p = 1$, le vecteur accélération n'est pas colinéaire au vecteur vitesse $q = 2$.
- Lorsque le vecteur vitesse s'annule et que l'accélération n'est pas nulle, $p = 2$, si de plus le vecteur dérivée troisième n'est pas colinéaire avec le vecteur accélération, $q = 3$. Donc dans ce cas $p = 2, q = 3$.
- Lorsque la vitesse n'est pas nulle $p = 1$, mais si l'accélération est colinéaire avec la vitesse $q \neq 2$, si de plus le vecteur dérivée troisième n'est pas colinéaire avec le vecteur vitesse on a alors $q = 3$. Donc dans ce cas $p = 1, q = 3$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Avec les hypothèses précédentes on peut montrer en utilisant la formule de Taylor à l'ordre q que l'on a :

$$\overrightarrow{M_0M}(t) = (t-t_0)^p \frac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)\left(\frac{1}{p!}+\varepsilon_1^*(t)\right) + (t-t_0)^q \frac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)\left(\frac{1}{q!}+\varepsilon_2^*(t)\right)$$

où $\varepsilon_1^*(t)$ et $\varepsilon_2^*(t)$ sont deux fonctions numériques qui tendent vers 0 quand t tend vers t_0.
On peut alors démontrer comme précédemment que :

- le vecteur tangent à la courbe en M_0 est le vecteur $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$,
- les vecteurs $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$ et $\dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)$ forment une base du plan,
- la composante de $\overrightarrow{M_0M}(t)$ sur le vecteur $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$ pour t proche de t_0 a le signe de $(t-t_0)^p$,
- la composante de $\overrightarrow{M_0M}(t)$ sur le vecteur $\dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)$ pour t proche de t_0 a le signe de $(t-t_0)^q$

Selon la parité des entiers p et q, $(t-t_0)^q$ et $(t-t_0)^p$, changent ou non de signe pour $t > t_0$ ou $t < t_0$. On obtient alors les cas de figures possibles :

1. Si p impair, q pair : point "normal". Voir figure III.3.1
2. Si p impair, q impair : point d'inflexion. Voir figure III.3.2
3. Si p pair, q impair : point de rebroussement de première espèce . Voir figure III.3.3.
4. Si p pair, q pair : point de rebroussement de deuxième espèce. Voir figure III.3.4.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

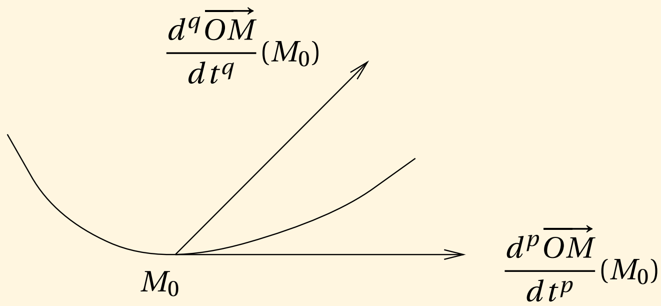


FIGURE 3.3.1 – point normal

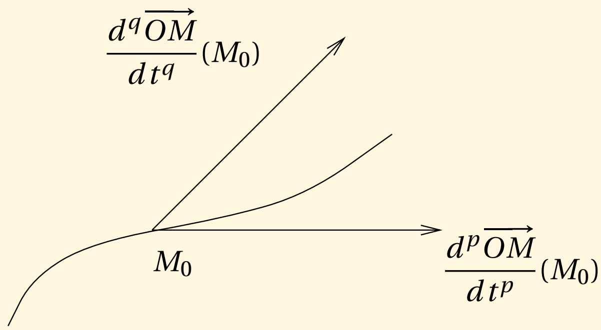


FIGURE 3.3.2 – point d'inflexion

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

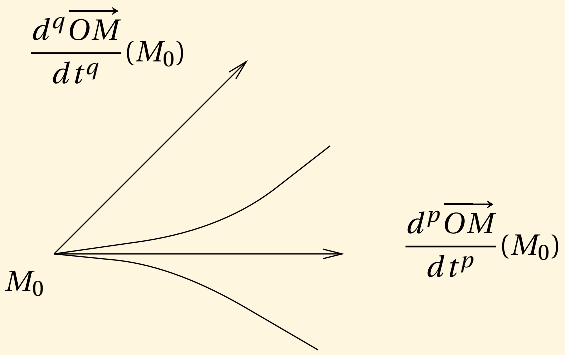


FIGURE 3.3.3 – point de rebroussement de première espèce

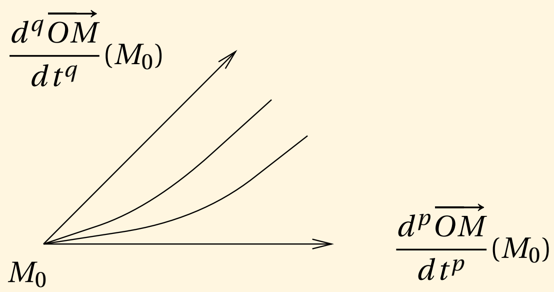


FIGURE 3.3.4 – point rebroussement de deuxième espèce

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.3.5 Courbes polaires-intervalle d'étude

Exercices :
Exercice A.1.21
Exercice A.1.22

θ étant donné, on définit $\vec{u}$ le vecteur de composantes $(\cos\theta, \sin\theta)$. Sur l'axe $\overrightarrow{Ou}$ (orienté) on définit le point M d'abscisse ρ (ρ peut être positif ou négatif). Lorsque ρ varie avec θ, le point M décrit une courbe C dont l'équation polaire est la donnée de la fonction $\rho(\theta)$. On pourrait étudier cette courbe C comme on vient de le faire dans les paragraphes précédents puisque en effet ses équations paramétriques sont alors : $\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$. Mais on peut aussi énoncer des propriétés spécifiques de ces courbes paramétriques particulières.

- Si $\rho(\theta+2\pi) = \rho(\theta)$, étude pour $\theta \in [a, a+2\pi]$, on obtient toute la courbe.
- Si $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$, étude pour $\theta \in [a, a+\pi]$, on obtient toute la courbe.
- Si $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$, étude pour $\theta \in [a, a+\pi]$, puis on effectue une symétrie par rapport à O.
- Si $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, on centre l'intervalle d'étude en 0, puis on étudie sur un demi-intervalle, puis on effectue une symétrie par rapport à Ox.
- Si $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, on centre l'intervalle d'étude en 0, puis on étudie sur un demi-intervalle, puis on effectue une symétrie par rapport à Oy.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.3.6 Etude locale des courbes polaires

Exercices :
Exercice A.1.23

La tangente à C en un point M_0 est la position limite de la sécante M_0M quand le point M tend vers le point M_0 en restant sur C. On suppose maintenant que la fonction ρ est dérivable.

- Si $\rho(\theta_0) = 0$ alors $M_0 = O$, or la position limite de la droite $OM(\theta)$ quand θ tend vers θ_0 est la droite qui fait un angle θ_0 avec l'axe Ox : on obtient facilement la droite tangente, c'est l'axe $\overrightarrow{Ou_0}$.
- Si $\rho(\theta_0) \neq 0$, en utilisant les résultats pour les courbes paramétrées, on calcule un vecteur tangent $\vec{T}_0$ de composantes $(x'(\theta_0), y'(\theta_0))$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\vec{T}_0 &= (-\rho(\theta_0)\sin\theta_0 + \rho'(\theta_0)\cos\theta_0)\vec{i} + (\rho(\theta_0)\cos\theta_0 + \rho'(\theta_0)\sin\theta_0)\vec{j} \\
&= \rho'(\theta_0)(\cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0)\vec{j}) + \rho(\theta_0)(-\sin\theta_0\vec{i} + \cos\theta_0)\vec{j}) \\
&= \rho'(\theta_0)\vec{u}_0 + \rho(\theta_0)\vec{v}_0.
\end{aligned}$$

On a noté $\vec{u}_0$ et $\vec{v}_0$ les vecteurs de composantes respectives

$$(\cos\theta_0, \sin\theta_0), (-\sin\theta_0, \cos\theta_0).$$

Le vecteur $\vec{T}_0$ n'est pas nul puisque $\rho(\theta_0) \neq 0$, c'est donc un vecteur tangent. On remarque en particulier que si $\rho'(\theta_0) = 0$, $\vec{T}_0$ est colinéaire avec $\vec{v}_0$ donc perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.3.7 Branches infinies des courbes polaires

Exercices :
Exercice A.1.24

- Si quand θ tend vers l'infini ρ tend vers ρ_0 : on obtient un cercle asymptote.
- Si quand θ tend vers l'infini ρ tend vers l'infini : on obtient une spirale.
- Si quand θ tend vers θ_0, ρ tend vers l'infini : on obtient comme direction asymptotique la droite qui fait un angle θ_0 avec Ox, en effet si on reprend une étude similaire à celle des courbes paramétrées $\dfrac{y(\theta)}{x(\theta)}$ tend vers $\tan\theta_0$. On va supposer que $\cos\theta_0 \neq 0$ (si ce n'est pas le cas, on échange x et y et on remplace $\tan\theta_0$ par $\cot\theta_0$). Pour poursuivre, on est donc amené à étudier la limite de l'expression :
  $y(\theta) - \tan\theta_0 x(\theta) = \rho(\theta)\dfrac{\cos\theta_0 \sin\theta - \sin\theta_0 \cos\theta}{\cos\theta_0} = \dfrac{\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)}{\cos\theta_0}$.
  Si $\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$ admet une limite finie ℓ, la courbe admet donc l'asymptote d'équation :
  $$y = x\tan\theta_0 + \frac{\ell}{\cos\theta_0}$$
  Ce que l'on peut encore écrire :
  $$y\cos\theta_0 = x\sin\theta_0 + \ell$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Dans le cas où $\cos\theta_0 = 0$, en échangeant les rôles de x et y comme indiqué précédemment, on montre que cette dernière expression reste valable.

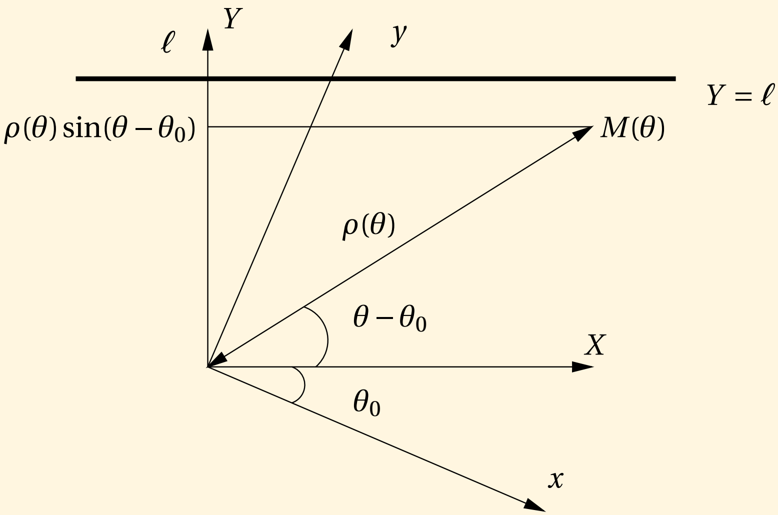


FIGURE 3.3.5 – courbe en polaire, asymptote

Dans le repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ cette droite asymptote a pour équation :

$$Y = \ell$$

Pour étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote, on étudie le signe de

$$\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0) - \ell.$$

Si le signe est positif alors dans le nouveau repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$ la courbe est au-dessus de l'asymptote, elle est au dessous dans le cas contraire. Voir figure III.3.5.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.3.8 Courbes dans l'espace

Exercices :
Exercice A.1.25
Exercice A.1.26

Soit la courbe dont les équations paramétriques sont : $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$.

On veut étudier cette courbe localement au voisinage du point M_0. On définit comme précédemment $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$ le premier vecteur dérivé non nul, $\dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)$ le premier vecteur dérivé non colinéaire avec le précédent, alors

$\left(\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0), \dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0), \dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0) \wedge \dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)\right)$ forme une base de l'espace. On peut alors définir les droites et plans suivants :

- La droite qui passe par M_0 et qui a pour vecteur directeur $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$ est la droite tangente à C en M_0.
- Le plan qui contient M_0 et les vecteurs :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

$\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0), \dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)$ est le plan osculateur à C en M_0. Si la courbe est plane, le plan osculateur est le plan de la courbe.

- Le plan qui contient M_0 et dont un vecteur normal est $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0)$, est le plan normal à C en M_0.
- Le plan qui contient M_0 et les vecteurs : $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0), \dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0) \wedge \dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)$ est le plan rectifiant à C en M_0.
- On appelle normale principale à C en M_0, la droite intersection du plan normal et du plan osculateur.
- On appelle bi-normale à C en M_0, la droite intersection du plan normal et du plan rectifiant. Un vecteur directeur de cette droite est $\dfrac{d^p\overrightarrow{OM}}{dt^p}(t_0) \wedge \dfrac{d^q\overrightarrow{OM}}{dt^q}(t_0)$.

On peut définir également deux grandeurs scalaires : la courbure c et la torsion τ en M_0

$$c = \frac{\left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \wedge \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0) \right\|}{\left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \right\|^3}$$

$$\tau = \frac{\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0), \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0), \dfrac{d^3\overrightarrow{OM}}{dt^3}(t_0) \right)}{\left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \wedge \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0) \right\|^2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.4 Surfaces

3.4.1 Quelques surfaces classiques

Cours :
Surfaces de révolution

Documents :
Document C.1

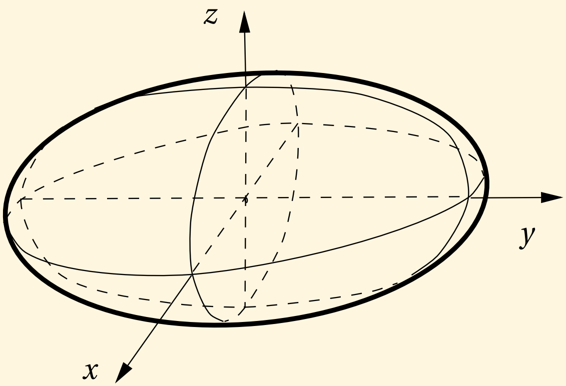
Rappelons l'équation cartésienne de quelques surfaces connues :

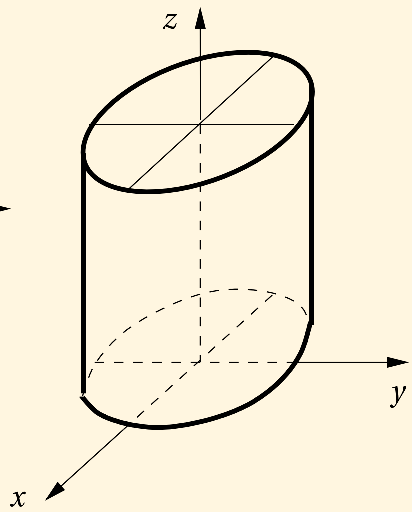
- Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $ax+by+cz=d$ est l'équation d'un plan dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{N}=(a,b,c)$
- $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, R\geq 0$ est l'équation d'une sphère de centre $\Omega=(x_0,y_0,z_0)$ et de rayon R. En effet l'équation précédente traduit la propriété : "la distance du point M de coordonnées (x,y,z) au point Ω est constante et égale à R", ce qui est bien la propriété caractéristique d'une sphère.
- Dans l'espace $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, R\geq 0$ est l'équation d'un cylindre de révolution de rayon R, dont l'axe Δ a pour équations $\{x=x_0, y=y_0\}$. En effet on a la propriété : "la distance du point M de coordonnées (x,y,z) à l'axe Δ est constante et égale à R", ce qui est bien la propriété caractéristique d'un cylindre.
  Bien sûr, si le contexte indique que l'on se trouve dans le plan xOy, l'équation
  $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2, R\geq 0$$
  est l'équation d'un cercle.
- Les quadriques sont des surfaces dont l'équation cartésienne est obtenue à partir d'un polynôme de degré 2 (les variables sont x,y,z). On retrouve dans cette famille les surfaces

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

classiques : sphères, cylindres, cônes et les surfaces un peu moins classiques : paraboloïdes, hyperboloïdes, ellipsoïdes. (Voir les figures qui suivent et celles qui se trouvent dans le document référencé.) Pour l'étude de certaines de ces surfaces voir le paragraphe référencé .

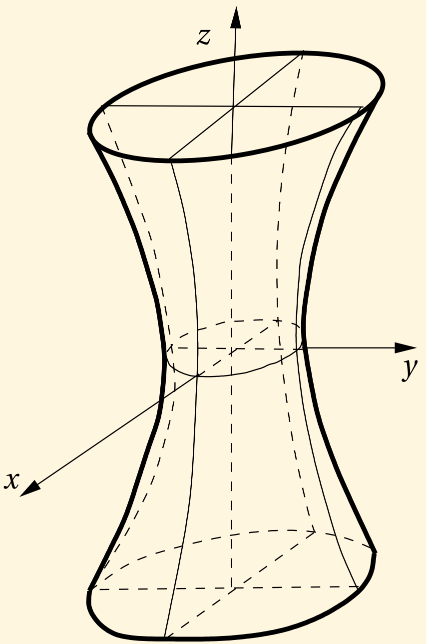




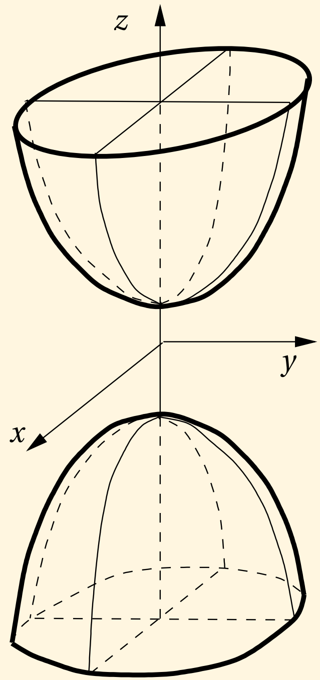
ellipsoïde **cylindre elliptique**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



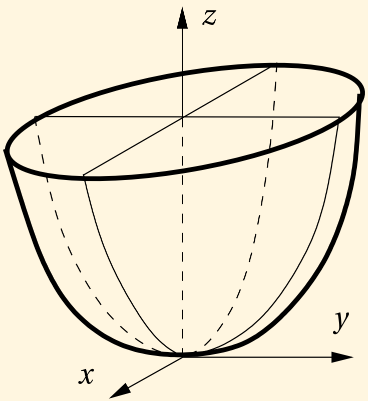
hyperboloïde à une nappe



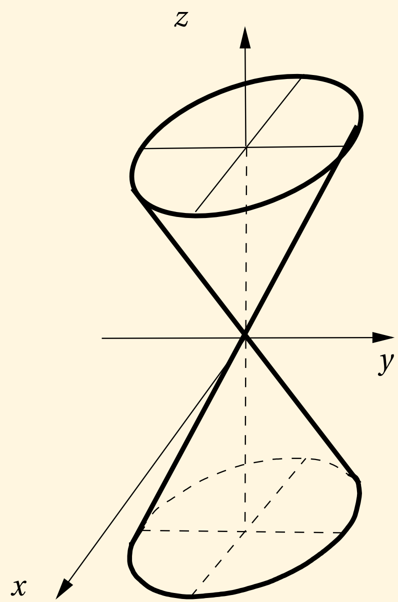
hyperboloïde à 2 nappes

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents



paraboloïde



cône

3.4.2 Surfaces de révolution

Exercices :
Exercice A.1.27

Définition 3.4.1. *Une surface est dite de* **révolution** *autour d'un axe Δ si son intersection avec un plan quelconque perpendiculaire à Δ est vide ou constituée d'un ou plusieurs cercles centrés sur Δ (un cercle peut être réduit à un point).*

Citons par exemple les sphères, les cônes, les cylindres, les tores. Nous allons retrouver ces surfaces et quelques autres maintenant.
L'étude d'une surface S de révolution se fait en 2 étapes :

- On détecte que la surface est de révolution autour de Δ en étudiant l'intersection de S avec un plan quelconque perpendiculaire à Δ, on doit trouver l'ensemble vide, ou un (ou plusieurs) cercle(s) centré(s) sur Δ.
- On détermine la nature de S en étudiant la courbe intersection de S avec un plan particulier contenant Δ.

Par exemple, étudions la surface S qui a pour équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Cette surface est une quadrique.

- L'intersection de S avec un plan quelconque perpendiculaire à Oz d'équation $z = c$, est un cercle situé dans le plan $z = c$, de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $|c|$. Donc la surface est de révolution autour de Oz.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– On détermine l'intersection de S avec un plan particulier contenant Oz : le plan yOz par exemple, on a donc $x = 0, y^2 = z^2$. On obtient ainsi 2 droites du plan yOz qui ont pour équation $y = z$ et $y = -z$. Donc la surface S est un cône d'axe Oz et de sommet O

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.4.3 Equation cartésienne-équation paramétrique

Exercices :
Exercice A.1.28

Lorsqu'une surface S est caractérisée par une équation cartésienne implicite

$$f(x, y, z) = 0,$$

est-il facile de déterminer des équations paramétriques de S ? Ce problème n'est pas toujours évident, il est assez facile à résoudre dans certains cas .

- Si l'équation cartésienne est explicite $z = \phi(x, y)$, on peut paramétrer par

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \phi(u, v), \end{cases}$$

  et on précise dans quel domaine varient les paramètres u, v.
- Si la surface est de révolution par exemple autour de Oz, l'intersection avec un plan d'équation $z = u$ est un cercle centré sur Oz dont le rayon est $r(u)$. Une paramétrisation possible de la surface est :

$$\begin{cases} x = r(u)\cos\theta, \\ y = r(u)\sin\theta, \\ z = u, \end{cases}$$

  et on précise dans quel domaine varient les paramètres u, θ.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

– Si la surface est un ellipsoïde, on peut la paramétrer en s'inspirant des coordonnées sphériques.
– Si la surface est un hyperboloïde, on peut la paramétrer en utilisant les cosinus et sinus hyperboliques.

3.5 Plan tangent à une surface en un point M_0

3.5.1 Plan tangent à une surface paramétrée

Exercices :
Exercice A.1.29
Exercice A.1.30

La surface S est caractérisée par ses équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a(u,v) \\ y = b(u,v) \quad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2. \\ z = c(u,v) \end{array}\right.$$

On suppose que les fonctions a, b, c sont différentiables en (u_0, v_0), la surface est alors dite différentiable en M_0.

Théorème 3.5.1. *Si la surface S est différentiable en M_0, si les vecteurs*

$$\vec{T}_1(M_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial b}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial c}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix}, \vec{T}_2(M_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial b}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial c}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires, il existe un plan Π tangent à S en M_0.
Ce plan contient M_0 et les vecteurs $\vec{T}_1(M_0), \vec{T}_2(M_0)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si les composantes de $\vec{N} = \vec{T}_1(M_0) \wedge \vec{T}_2(M_0)$ *sont* (α, β, γ)*, l'équation de* Π *est*

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0.$$

Démonstration.– Le plan tangent à une surface S en M_0 s'il existe, est un plan qui contient les droites tangentes à toutes les courbes tracées sur S et passant par M_0. Admettons que, sous les hypothèses du théorème, ce plan tangent existe, il suffit maintenant de 2 vecteurs pour le caractériser. On définit les courbes C_1 et C_2 paramétrées par :
$C_1 : \begin{cases} x_1(u) = a(u, v_0) \\ y_1(u) = b(u, v_0) \\ z_1(u) = c(u, v_0) \end{cases}, C_2 : \begin{cases} x_2(v) = a(u_0, v) \\ y_2(v) = b(u_0, v) \\ z_2(v) = c(u_0, v) \end{cases}$. Ces courbes sont tracées sur la surface S et elles passent par M_0. Un vecteur tangent à C_1 en M_0 est le vecteur de composantes $(x_1'(u_0), y_1'(u_0), z_1'(u_0))$, or ce vecteur est le vecteur $\vec{T}_1(M_0)$. De même un vecteur tangent à C_2 en M_0 est le vecteur $\vec{T}_2(M_0)$. Donc les vecteurs $\vec{T}_1(M_0)$ et $\vec{T}_2(M_0)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan tangent, ce qui définit complètement ce plan.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3.5.2 Plan tangent à une surface définie par son équation cartésienne

Exercices :
Exercice A.1.31
Exercice A.1.32
Exercice A.1.33

Théorème 3.5.2. *La surface S est caractérisée par une équation cartésienne implicite :*

$$f(x,y,z)=0.$$

On suppose que f est différentiable en M_0. On note

$$\vec{N}_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right).$$

On suppose que$\vec{N}_0\neq\vec{0}$, alors $\vec{N}_0$ est un vecteur normal à S en M_0, d'où l'équation du plan tangent à S en M_0 :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0$$

Démonstration.– Un vecteur normal à une surface en un point est un vecteur normal au plan tangent à la surface en ce point.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Soit C une courbe tracée sur la surface S et qui passe par M_0. Si les équations paramétriques de C sont : $\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \\ z = \gamma(t) \end{cases}$ $t \in I$, on a donc

$$\alpha(t_0) = x_0, \beta(t_0) = y_0, \gamma(t_0) = z_0, f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) = 0 \ \forall t \in I.$$

On suppose que les fonctions α, β, γ sont dérivables, donc la courbe C admet un vecteur tangent en M_0 qui est $\vec{T}_0 = \begin{pmatrix} \alpha'(t_0) \\ \beta'(t_0) \\ \gamma'(t_0) \end{pmatrix}$

Appelons g la fonction d'une variable définie par $g(t) = f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$. Puisque f est différentiable et que α, β, γ sont dérivables, la fonction g est dérivable. Les résultats sur les dérivées des fonctions composées permettent de calculer la dérivée de g :

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\alpha'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\beta'(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))\gamma'(t) \end{aligned}$$

Donc en particulier $g'(t_0) = \vec{T}_0 \cdot \vec{N}_0$.

Or

$$f(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) = 0 \ \forall t \iff g(t) = 0 \ \forall t \implies g'(t_0) = 0 \iff \vec{T}_0 \cdot \vec{N}_0 = 0$$

Plan tangent à une surface définie par son équation cartésienne

On en déduit que le vecteur $\vec{N}_0$ est orthogonal à $\vec{T}_0$, c'est à dire le vecteur $\vec{N}_0$ est orthogonal au vecteur tangent à une courbe quelconque tracée sur S et passant par M_0. Ce vecteur $\vec{N}_0$ est donc orthogonal au plan tangent à S en M_0, ce qui termine la démonstration.

Théorème 3.5.3. *La surface S est caractérisée par une équation cartésienne explicite :*

$$z = \phi(x, y),$$

on suppose que ϕ est différentiable en (x_0, y_0) alors l'équation du plan tangent à S en M_0 est :

$$(x - x_0)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0$$

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch3-Exercice1

Donner des équations paramétriques de la demi-sphère définie par :
$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=5,\ y\geq 2$

Solution

Exercice A.1.2 Ch3-Exercice2

Soit M_0 un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) , soient $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ deux vecteurs non colinéaires dont les composantes sont $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$. Donner des équations paramétriques du plan Π qui contient le point M_0 et dont deux des vecteurs sont $\vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.3 Ch3-Exercice3

1. Donner une équation cartésienne implicite de la sphère de centre $(3,-6,1)$ et de rayon 6.
2. Donner l'équation cartésienne implicite d'un plan quelconque.
3. Donner une équation cartésienne implicite du cylindre d'axe Oz et de rayon 5.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch3-Exercice4

Quelle est la surface dont l'équation explicite est $z = 4x + 3y - 8$?

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch3-Exercice5

1. Est-ce que tout plan a une équation explicite de la forme $z = \phi(x, y)$? Si oui, montrez le, si non donnez un contre-exemple.
2. Est-ce qu'une sphère a une équation explicite de la forme $z = \phi(x, y)$?
3. Donner une équation cartésienne explicite de la demi-sphère définie par :
   $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 5,\ y \geq 2$

Solution

Exercice A.1.6 Ch3-Exercice6

1. Donner les équations paramétriques d'un cercle du plan xOy de centre (x_0, y_0) et de rayon R.
2. Donner une équation cartésienne implicite d'un cercle du plan xOy de centre (x_0, y_0) et de rayon R.

Solution

Exercice A.1.7 Ch3-Exercice7

Donner une équation cartésienne implicite et des équations paramétriques de la courbe définie par $y = e^x$.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch3-Exercice8

Tracer l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ où a, b sont deux réels positifs non nuls. Que se passe-t-il quand $a=b$?

Solution

Exercice A.1.9 Ch3-Exercice9

1. Tracer les droites d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$
2. Tracer les hyperboles d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où } a, b \text{ sont deux réels positifs non nuls.}$$
On pourra en particulier déterminer leurs points d'intersection avec les axes.
3. Tracer les hyperboles d'équation
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ où } a, b \text{ sont deux réels positifs non nuls.}$$
On pourra en particulier déterminer leurs points d'intersection avec les axes

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch3-Exercice10

Tracer la courbe dont les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \quad \text{où } a, c, \omega \text{ sont des réels fixés },\ 0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega} \\ z = ct \end{cases}$$

Solution

Exercice A.1.11 Ch3-Exercice11

Donner des équations paramétriques de la droite Δ passant par M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et de vecteur directeur $\vec{V}$ (non nul) de composantes (a, b, c).

Solution

Exercice A.1.12 Ch3-Exercice12

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite D dont les équations cartésiennes sont :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=1 \end{cases} .$$

2. Trouver les coordonnées d'un point particulier de D.
3. En déduire des équations paramétriques de D

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch3-Exercice13

On suppose que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $(\alpha,\beta,\gamma) \neq (0,0,0)$, que représente l'ensemble dont les équations sont

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\delta \end{array}\right.$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch3-Exercice14

Déterminer un vecteur tangent en M_0 à l'hélice d'équation : $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = ct \end{array}\right.$

Solution

Exercice A.1.15 Ch3-Exercice15

Reprendre l'étude des symétries d'une courbe paramétrée. Dans chacun des cas cités, faire une figure pour illustrer la propriété.

Solution

Exercice A.1.16 Ch3-Exercice16

Etudier la courbe dont les équations paramétriques sont : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3}{t(t-2)} \\ y(t) = \dfrac{t^2-3}{t} \end{cases}$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch3-Exercice17

On reprend la courbe dont les équations ont été définies dans l'exercice A.1.16. Montrer que pour tout t du domaine de définition, les vecteurs $(x'(t), y'(t))$ et $(x''(t), y''(t))$ ne sont pas colinéaires.

Solution

Exercice A.1.18 Ch3-Exercice18

Reprendre l'exemple de la cinématique et constater que le vocabulaire utilisé dans le langage courant est en accord avec la terminologie de "point de rebroussement", "point d'inflexion" définie dans le cours.

Exercice A.1.19 Ch3-Exercice19

On étudie la courbe d'équation $y = f(x)$ où la fonction f est indéfiniment dérivable. Peut-il y avoir un point de rebroussement ? Quelles sont les conditions pour qu'il y ait un point d'inflexion ?

Solution

Exercice A.1.20 Ch3-Exercice20

Construire la courbe dont les équations paramétriques sont : $\begin{cases} x(t) = t^2 + t^4 \\ y(t) = t^3 - t^4 \end{cases}$. En particulier étudier le point d'inflexion, le point de rebroussement et les branches infinies.

Solution

Exercice A.1.21 Ch3-Exercice21

Faire une figure pour illustrer les propriétés de réduction de l'intervalle d'étude pour les courbes définies par leur équation polaire.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch3-Exercice22

Quel est l'intervalle d'étude de la courbe d'équation $\rho(\theta) = 1 + \tan\frac{\theta}{2}$?

Solution

Exercice A.1.23 Ch3-Exercice23

Soit la courbe d'équation $\rho(\theta) = 1+\tan\frac{\theta}{2}$, tracer les points de la courbe et les vecteurs tangents pour les valeurs particulières $\theta = 0$, $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch3-Exercice24

Etudier les branches infinies et tracer la courbe d'équation $\rho(\theta) = 1 + \tan\frac{\theta}{2}$.
Utiliser tout ce qui a été étudié dans les exercices A.1.22, A.1.23.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch3-Exercice25

Calculer la courbure et la torsion de l'hélice d'équation : $\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = ct \end{cases}$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch3-Exercice26

Calculer la courbure d'une droite, calculer la torsion d'une courbe plane.

Solution

Exercice A.1.27 Ch3-Exercice27

Etudier et représenter graphiquement les surfaces d'équation :

1. $z = x^2 + y^2$.
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ où a, c sont deux paramètres strictement positifs.
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ où a, c sont deux paramètres strictement positifs.
4. $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ où a, c sont deux paramètres strictement positifs.
5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + z = 0$ où a est un paramètre strictement positif.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.28 Ch3-Exercice28

Donner des équations paramétriques des surfaces dont les équations cartésiennes sont définies ci-après, préciser dans chacun des cas de quelle surface il s'agit.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ où a,b,c sont trois paramètres strictement positifs.
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ où a,b,c sont trois paramètres strictement positifs.
3. $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ où a,b,c sont trois paramètres strictement positifs.
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ où a,c sont deux paramètres strictement positifs.
5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ où a,b,c sont trois paramètres strictement positifs.
6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z=0$ où a,b sont deux paramètres strictement positifs.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Ch3-Exercice29

Ecrire les équations paramétriques d'une sphère de centre O et de rayon R à l'aide de la longitude θ et de la latitude ϕ sous la forme $\left\{\begin{array}{l} x = a(\theta,\phi) \\ y = b(\theta,\phi) \\ z = c(\theta,\phi) \end{array}\right.$. Soit M_0 un point de la sphère de latitude ϕ_0 et de longitude θ_0, on définit les courbes C_1, C_2 paramétrées par :
$C_1 : \left\{\begin{array}{l} x_1(\theta) = a(\theta,\phi_0) \\ y_1(\theta) = b(\theta,\phi_0) \\ z_1(\theta) = c(\theta,\phi_0) \end{array}\right.$, $C_2 : \left\{\begin{array}{l} x_2(\phi) = a(\theta_0,\phi) \\ y_2(\phi) = b(\theta_0,\phi) \\ z_2(\phi) = c(\theta_0,\phi) \end{array}\right.$. Tracer les courbes C_1 et C_2

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch3-Exercice30

Déterminer l'équation du plan tangent en M_0 à une sphère de centre $\Omega = (a, b, c)$ et rayon R en utilisant des équations paramétriques.

Solution

Exercice A.1.31 Ch3-Exercice31

S est la sphère d'équation implicite $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$. Déterminer un vecteur normal à la sphère en M_0. On note Ω le point de coordonnées (a,b,c), retrouver le résultat bien connu : $\overrightarrow{\Omega M_0}$ est orthogonal à la sphère en M_0.

Solution

Exercice A.1.32 Ch3-Exercice32

Déterminer l'équation du plan tangent tangent en M_0 à l'ellipsoïde d'équation :
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Solution

Exercice A.1.33 Ch3-Exercice33

Rappeler comment on obtient l'équation du plan tangent en M_0 à une surface dont l'équation implicite est $f(x, y, z) = 0$.
La surface S est caractérisée par une équation cartésienne explicite : $z = \phi(x, y)$ et on suppose que ϕ est différentiable en (x_0, y_0). Montrer que l'équation du plan tangent à S en M_0 est :

$$(x - x_0)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Comme on l'avait annoncé dans le chapitre 1, l'équation du plan tangent est :

$$z = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0).$$

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 paramétrage de bords de domaines de $\mathbb{R}^2$

Pour chacun des domaines $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ ci-dessous, faire un dessin représentant $\mathscr{D}$ et paramétrer son bord.

1. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1, \left|y\right| < 1\right\}$
2. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \geq x\right\}$
3. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0, x + y < 1\right\}$
4. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 - x < 0, x^2 + y^2 - y > 0, y > 0\right\}$
5. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + (y-2)^2 \leq 4, x \geq 0\right\}$
6. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y^2 \leq 4x, y \geq 0, x \leq h\right\}$
7. $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x < 2y, y < 2x, y < 2\right\}$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 coniques

On considère les courbes de $\mathbb{R}^2$ d'équations respectives

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\
(2) & \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\
(3) & -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\
(4) & ax^2 - y + b = 0
\end{array}
$$

Pour chacune de ces courbes, faire une figure, donner une représentation paramétrique (on n'oubliera pas l'intervalle de variation du paramètre).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 étude de courbes paramétrée

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étudier les courbes définies paramétriquement par les équations suivantes (pour chaque cas, on précisera l'intervalle de variation du paramètre, en tenant compte des symétries éventuelles).

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x(t) = \frac{t-1}{t} & y(t) = \dfrac{t^2}{t+1} \\
(2) & x(t) = t^2 & y(t) = e^{-t} \\
(3) & x(t) = 2 + \frac{1}{t} - \frac{4}{t+1} & y(t) = 1 + t + \dfrac{1}{t} \\
(4) & x(t) = \frac{3}{t(t-2)} & y(t) = \dfrac{t^2-3}{t} \\
(5) & x(t) = \frac{2t}{t^2-1} & y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \\
(6) & x(t) = \frac{t^2+1}{2t} & y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \\
(7) & x(t) = a\sin 2t & y(t) = b\sin 3t
\end{array}
$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 étude de courbes en polaire

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étudier les courbes définies par les équations suivantes en coordonnées polaires (pour chaque cas, on précisera l'intervalle de variation du paramètre, en tenant compte des symétries éventuelles).

$$\begin{array}{lll} (1) & \rho = & 3(\cos\theta - \cos 2\theta) \\ (2) & \rho = & 2\sin\dfrac{2\theta}{3} \\ (3) & \rho = & (\cos\theta + \sin\theta)\sin 2\theta \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 équations de plans dans $\mathbb{R}^3$

Pour chacun des deux plans suivants, donner une équation catésienne et des équations paramétriques.

1. $(\mathscr{P})$ est le plan perpendiculaire à la direction $\vec{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
2. $(\mathscr{Q})$ est le plan parallèle aux directions $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, et passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 quadriques

Pour chacune des surfaces dont une équation cartésienne est donnée ci-dessous, on demande de

- déterminer la nature de la surface (nom du type de quadrique, révolution ou non ?)
- faire une figure (allure en perspective)
- paramétrer la surface (plusieurs choix sont possibles, attention à l'intervalle de variation des paramètres)

Discuter (s'il y a lieu) selon la valeur des paramètres réels α, a, b, c.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x^2+\alpha y^2+z^2=1 \\
(2) & -2x^2+y^2+z^2=\alpha \\
(3) & x^2+2y+z^2=1 \\
(4) & x^2+2y-z^2=0 \\
(5) & x^2+2x+z^2=1 \\
(6) & x^2+2x-z^2=1 \\
(7) & x^2+2x=-1 \\
(8) & x^2+y=0 \\
(9) & x^2-y^2=1 \\
(10) & x^2+\alpha^2 z^2=2x+3 \\
(11) & x^2+y^2=z-2x-2y \\
(12) & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1
\end{array}
$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 courbes de $\mathbb{R}^3$

1. Pour chacune des trois courbes ci-dessous, faire un dessin (allure) et donner une paramétrisation.

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2+y^2=1, \quad z=3 \\ (2) & x^2+y^2=1, \quad x+y+z=1 \\ (3) & x^2+y^2=1, \quad x+y=1 \end{array}$$

2. Soit la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations suivantes

$$z=x^2+y^2, \quad x^2+\frac{1}{2}y^2=1$$

   Tracer et paramétrer cette courbe. Donner une paramétrisation de la droite tangente à cette courbe en un point M_0.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 intersection de surfaces de $\mathbb{R}^3$

On considère la courbe $\mathscr{C}$, intersection des deux surfaces $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ définies paramétriquement par :

$$\begin{cases} (\mathscr{S}_1) & x = u + v + \frac{1}{3} & y = u - 2v + \frac{1}{3} & z = -2u + v + \frac{1}{3} \\ (\mathscr{S}_2) & x = u & y = v & z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

1. Donner des équations implicites pour $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$. Nommer ces surfaces.
2. (a) Soit $M_2 \in \mathscr{S}_2$. Utiliser 2 méthodes différentes pour trouver un vecteur normal à $\mathscr{S}_2$ au point M_2. En déduire l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}_2$ au point M_2.

   (b) On suppose que M_2 appartient aussi à $\mathscr{S}_1$. Donner un vecteur tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en M_2. En déduire des équations paramétriques de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_2.
3. Montrer que $\mathscr{C}$ peut aussi être définie comme intersection d'un cylindre et d'un plan. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{C}$. Retrouver un vecteur tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en M_2.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.9 surface de $\mathbb{R}^3$, projection, bord

On considère la surface $\mathscr{S}$, définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & x^2+y^2 \\ z & \leq & 1-2y \end{array}\right.$$

1. Dessiner $\mathscr{S}$.
2. Déterminer la projection de $\mathscr{S}$ sur le plan $z=0$.
3. Paramétrer $\mathscr{S}$.
4. Donner l'équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point M_0, d'une part en utilisant la représentation paramétrique, d'autre part en utilisant l'équation cartésienne.
5. On appelle $\mathscr{C}$ le bord de $\mathscr{S}$.
   (a) Donner les équations cartésiennes de $\mathscr{C}$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}$ est l'intersection d'un plan et d'un cylindre. En déduire des équations paramétriques de $\mathscr{C}$.
   (c) Donner un vecteur tangent à la courbe $\mathscr{C}$ en un point M_0.

Annexe B
Exemples

Exemple B.1 Vecteurs tangents à un cercle

Le cercle du plan xOy de centre $\Omega = (a,b)$ et de rayon R a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = a + R\cos t, \\ y = b + R\sin t. \end{cases}$$

Un vecteur tangent $\vec{T}_0$ en M_0 a pour composantes

$$x'(t_0) = -R\sin(t_0) = -(y_0 - b)\ ,\ y'(t_0) = R\cos(t_0) = (x_0 - a).$$

On retrouve la propriété bien connue : $\vec{T}_0$ est orthogonal à $\overrightarrow{\Omega M_0}$. Il suffit d'effectuer le produit scalaire pour s'en convaincre.

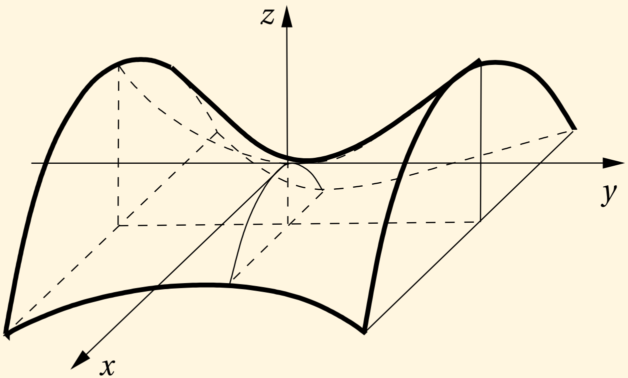
Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

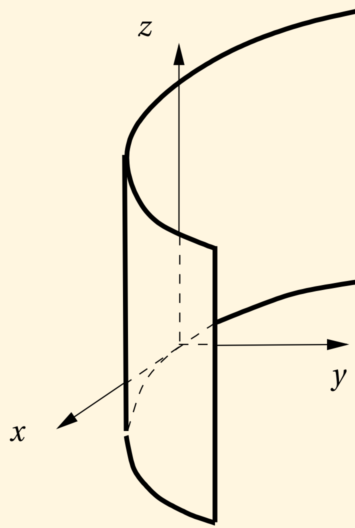
Annexe C
Documents

Document C.1 quadriques

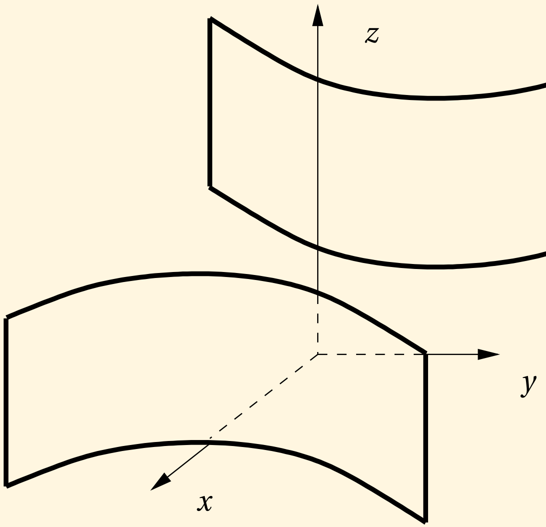
Quelques autres quadriques :



paraboloïde hyperbolique



cylindre parabolique



cylindre hyperbolique

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

Il faut traduire sur les paramètres la condition $y \geq 2$. On obtient :

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{5}\cos\theta\cos\phi \\ y = 2 + \sqrt{5}\sin\theta\cos\phi \\ z = -1 + \sqrt{5}\sin\phi \end{cases} \quad \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

$$M \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0 M} = u\vec{U}_1 + v\vec{U}_2, \;\; u \in \mathbb{R}, \;\; v \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + a_2 v \\ y = y_0 + b_1 u + b_2 v \\ z = z_0 + c_1 u + c_2 v \end{cases}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

1. $$(x-3)^2+(y+6)^2+(z-1)^2=36$$
2. $$ax+by+cz+d=0$$
3. $$x^2+y^2=25$$

Retour à l'exercice ▲

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

1. L'équation implicite d'un plan est :
$$ax + by + cz = d$$
On aimerait diviser par c, ceci n'est possible que si $c \neq 0$.
Par exemple le plan d'équation $x = y$ n'a pas d'équation explicite de la forme $z = \phi(x, y)$. Représenter ce plan sur une figure.
2. Si $z = \phi(x, y)$ cela signifie que pour (x, y) donnés , il existe un seul point sur la surface.
Or pour (x, y) donnés il existe 2 points sur la sphère, l'un sur l'hémisphère "nord", l'autre sur l'hémisphère "sud".
Donc il n'y pas d'équation explicite
$$z = \phi(x, y)$$
pour la shère entière.
3. En utilisant l'équation implicite on obtient :
$$(y-2)^2 = 5 - (x-1)^2 - (z+1)^2$$
Or
$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ et } |a| = a \text{ si } a \geq 0.$$
donc :
$$y - 2 = \sqrt{(y-2)^2} = \sqrt{5 - (x-1)^2 - (z+1)^2}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.6

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{array}\right., \ 0 \leq t < 2\pi$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Retour à l’exercice ▲

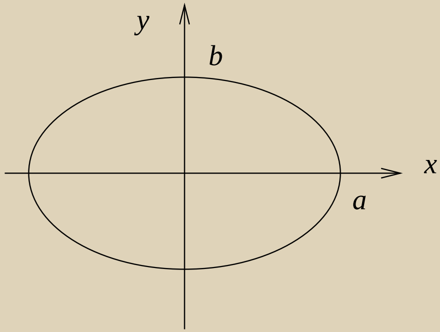
Solution de l’exercice A.1.7

$$y - e^x = 0$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = e^t \end{cases}$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8



Si $a = b$, on obtient un cercle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

1.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ ou } \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$$

Voir la figure qui suit

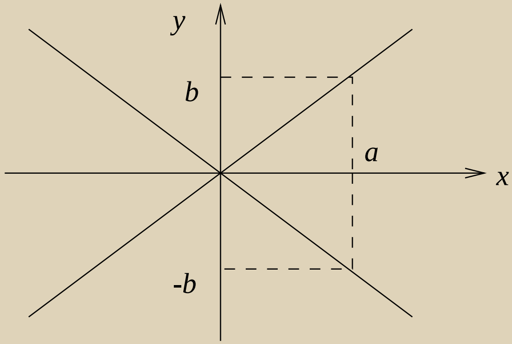


FIGURE C.1 – asymptotes des hyperboles

2. Il n'y a pas de point d'intersection de l'hyperbole avec l'axe Oy, par contre il y a deux points d'intersection avec l'axe Ox, les points $(a, 0)$ et $(-a, o)$.

   Il s'agit donc des hyperboles "est-ouest". Voir la figure qui suit
3. Il n'y a pas de point d'intersection de l'hyperbole avec l'axe Ox, par contre il y a deux points d'intersection avec l'axe Oy, les points $(0, b)$ et $(0, -b)$.

   Il s'agit donc des hyperboles "nord-sud". Voir la figure ci-dessus.

Retour à l'exercice ▲

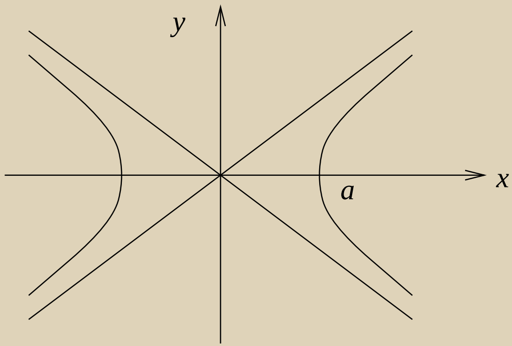


FIGURE C.2 – hyperboles "est-ouest"

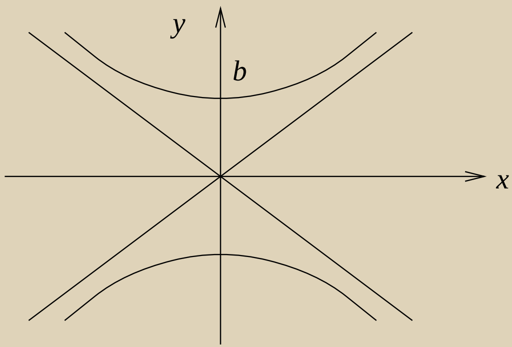


FIGURE C.3 – hyperboles "nord-sud"

Il s'agit d'une portion d'hélice, voir la figure qui suit

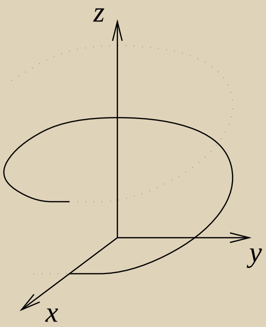


FIGURE C.4 – hélice

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

On pourra écrire que $M \in \Delta \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M}$ est proportionnel à $\vec{V}$

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \lambda c \end{array}\right.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

1. Revoir l'exercice A.1.5.

$$(1,1,1) \wedge (1,-1,2) = (3,-1,-2)$$

2. On cherche un point particulier par exemple dans le plan $z = 0$.

   $(1,0,0)$ est un point de D en effet ces coordonnées vérifient les 2 équations de plans.

3.

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}$$

   sont des équation paramétriques de D.

   ATTENTION : Ces équations ne sont pas uniques . Vous avez peut-être obtenu un autre vecteur directeur (mais il est forcément proportionnel à $\vec{V}$), et surtout vous avez peut-être choisi un autre point particulier. Dans tous les cas vérifiez que les équations paramétriques obtenues vérifient bien les équations des 2 plans.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

$ax + by + cz = d, \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ sont les équations de 2 plans.

- Si les vecteurs (a, b, c) et (α, β, γ) ne sont pas proportionnels, les plans ne sont pas parallèles, leur intersection est une droite.
- Si $(a, b, c) = \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$, les plans sont strictement paralèles ou confondus.
  - Si $d = \lambda\delta$, les plans sont confondus, leur intersection est un plan.
  - Si $d \neq \lambda\delta$, les plans sont strictement parallèles, leur intersection est vide.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.14

$$\vec{T} = (-a\omega \sin \omega t_0, a\omega \cos \omega t_0, c)$$

Retour à l’exercice ▲

Voir la figure qui suit

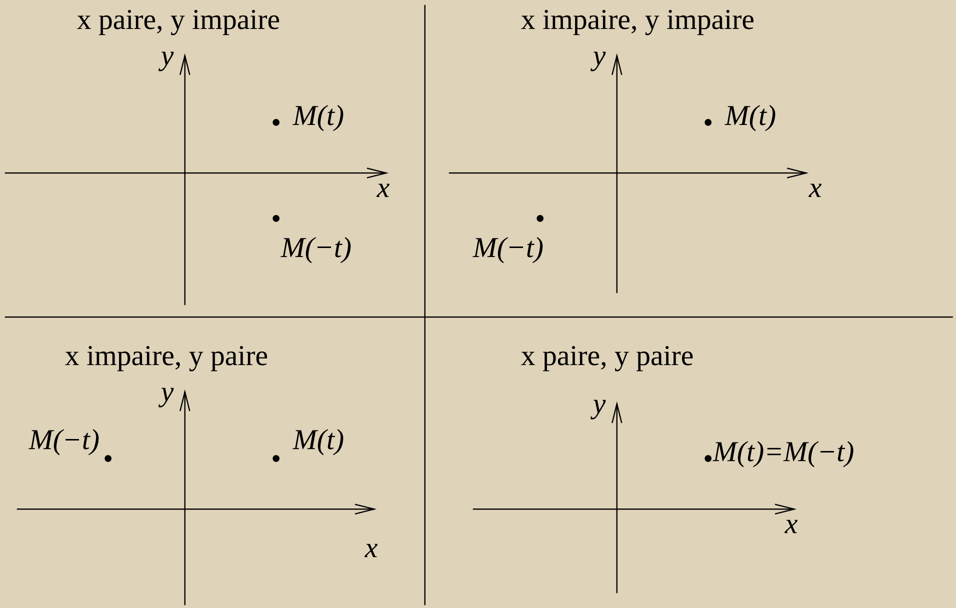


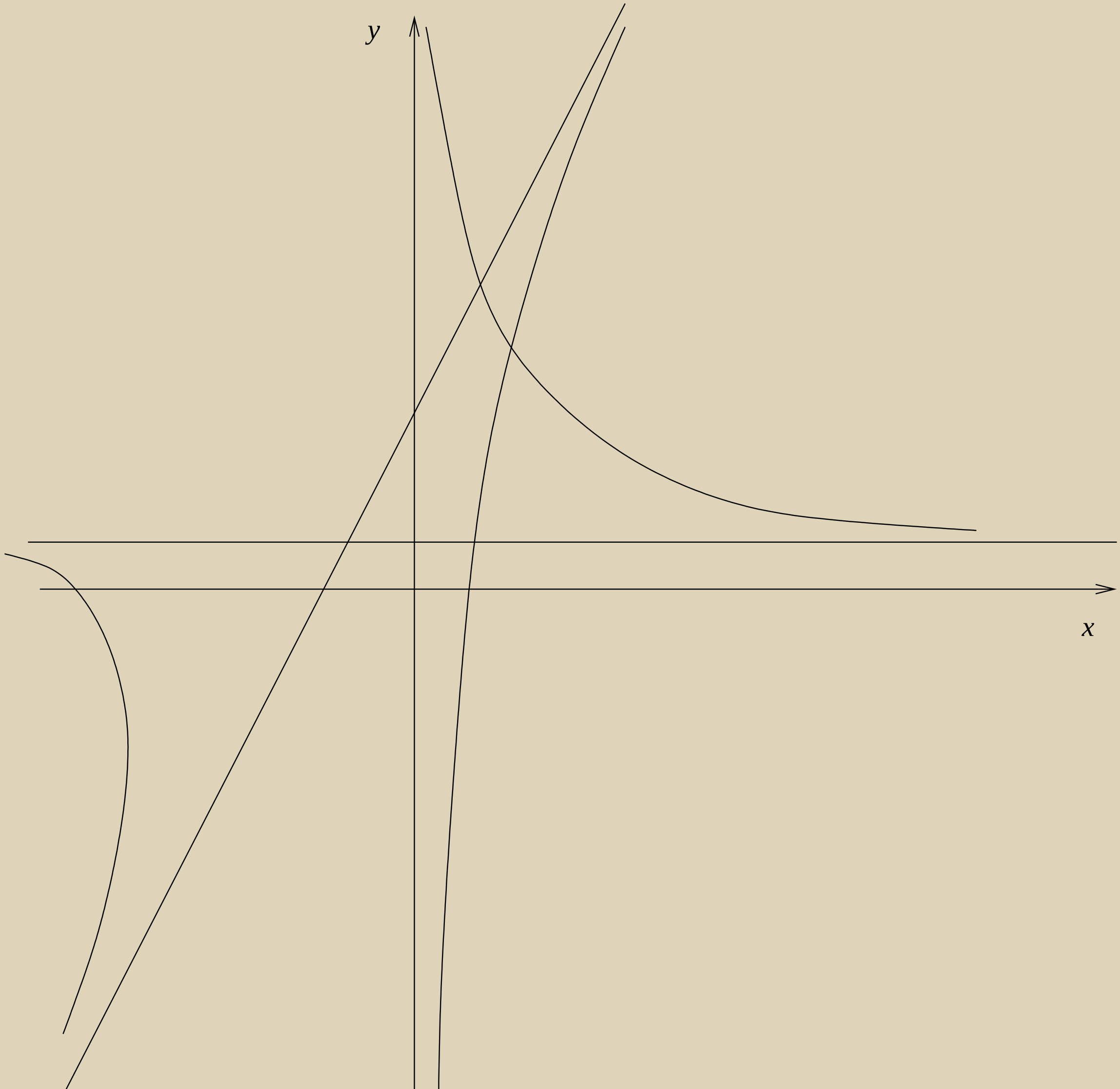
FIGURE C.5 – symétries pour une courbe paramétrée

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.16

Voir figure qui suit

Retour à l’exercice ▲



y
x

Solution de l’exercice A.1.17

Il suffit de montrer que

$$\forall t \;\; x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) \neq 0$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

Une telle courbe a pour équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = f'(t) \end{cases}$$

ce vecteur n'est jamais nul, donc $p = 1$, il ne peut donc pas y avoir point de rebrousement car p n'est pas pair.

Pour qu'il y ait point d'inflexion, il faut et il suffit que q soit impair, il ne faut donc pas que $q = 2$, donc il faut que les vecteurs $(x'(t), y'(t))$ et $(x''(t), y''(t))$ soient proportionnels.

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = f''(t) \end{cases}$$

Il faut donc que $f''(t) = 0$, on retrouve la condition nécessaire bien connue pour qu'il y ait point d'inflexion. Cette condition n'est pas suffisante. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

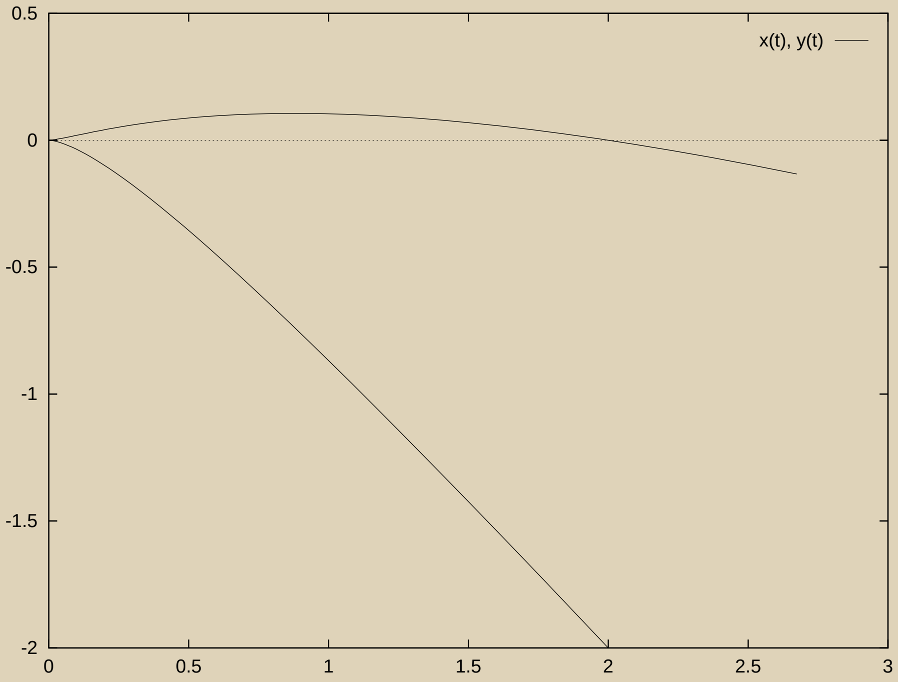


FIGURE C.7 – courbe paramétrée

Il y a un point de rebroussement de première espèce pour $t = 0$, pourquoi ? Un vecteur tangent en ce point a pour composantes $(2, 0)$.

Il y a 2 points d'inflexion pour $t_1 = -\frac{4+\sqrt{34}}{6}$, $t_2 = \frac{-4+\sqrt{34}}{6}$

Il y a une direction asymptotique de direction $y = -x$.

Voir la figure ci-dessus.

Retour à l’exercice ▲

Voir la figure ci-bas

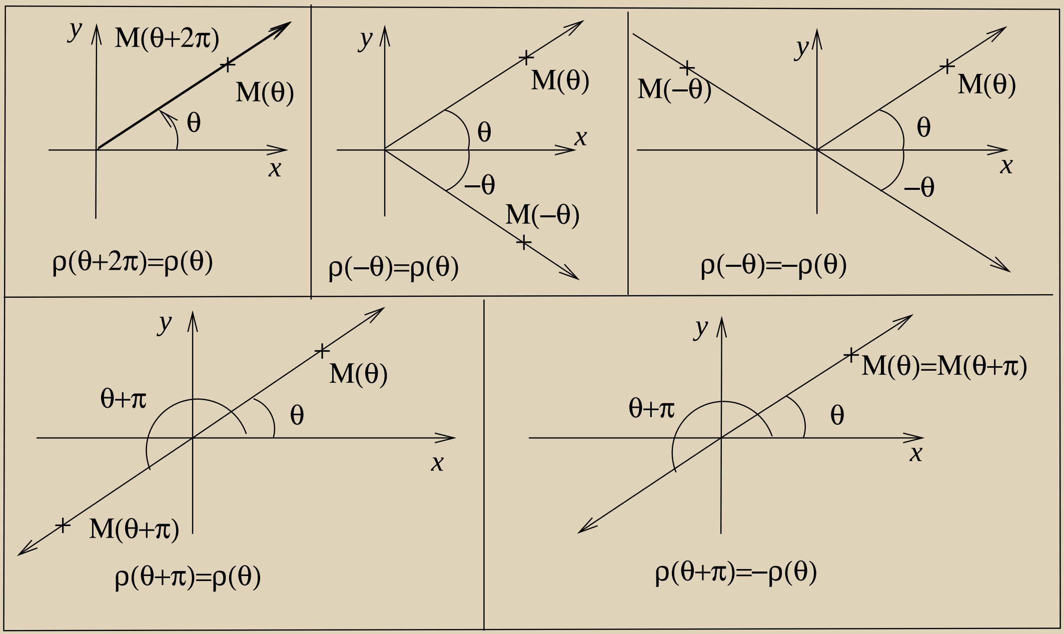


FIGURE C.8 – symétrie pour une courbe en polaire

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

On obtient toute la courbe par une étude sur $[0,2\pi[$, il n'y a pas d'autre réduction d'intervalle d'étude possible.

Sur cet intervalle d'étude $[0,2\pi]$, la courbe n'est pas définie pour π.

Retour à l'exercice ▲

Voir la figure qui suit

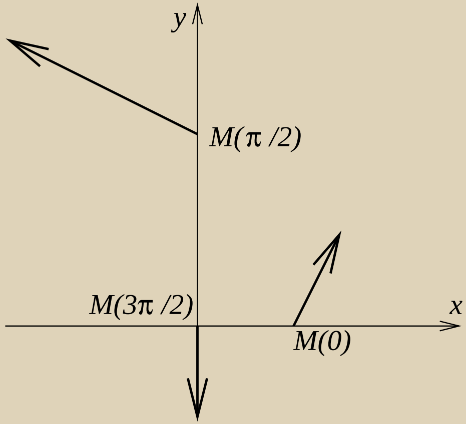


FIGURE C.9 – quelques points particuliers et leur tangente

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

$$\rho(\theta) \to \infty \text{ quand } \theta \to \pi$$

$$\rho(\theta)\sin(\theta-\pi) = -\sin\theta - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \to -2 \text{ quand } \theta \to \pi$$

$$\rho(\theta)\sin(\theta-\pi) + 2 = 2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})$$

$$\rho(\theta)\sin(\theta-\pi) + 2 \to 0^+ \text{ quand } \theta \to \pi^+$$

$$\rho(\theta)\sin(\theta-\pi) + 2 \to 0^- \text{ quand } \theta \to \pi^-$$

FIGURE C.10 – courbe polaire

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

La courbure vaut $a\omega^2$.

La torsion vaut $\dfrac{ac\omega^3}{\sqrt{c^2 + a^2\omega^2}}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.26

La courbure d'une droite est nulle car le vecteur dérivée seconde est nul.

La torsion d'une courbe plane est nulle car les 3 vecteurs dérivées première, seconde et troisième sont coplanaires (dans le plan de la courbe).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

1. On montre que la surface est de révolution autour de Oz. On détermine sa nature en étudiant l'intersection avec un plan particulier contenant Oz, $x = 0$ par exemple. La surface est un paraboloïde, voir les figures dans le paragraphe "Surfaces-exemples".
2. On montre que la surface est de révolution autour de Oz. On détermine sa nature en étudiant l'intersection avec un plan particulier contenant Oz, $x = 0$ par exemple. Revoir l'exercice A.1.8.

   La surface est un ellipsoïde, voir les figures dans le paragraphe "Surfaces-exemples".
3. On montre que la surface est de révolution autour de Oz. On détermine sa nature en étudiant l'intersection avec un plan particulier contenant Oz, $x = 0$ par exemple. Revoir l'exercice A.1.16.

   La surface est un hyperboloïde à une nappe, voir les figures dans le paragraphe "Surfaces-exemples".
4. On montre que la surface est de révolution autour de Oz. On détermine sa nature en étudiant l'intersection avec un plan particulier contenant Oz, $x = 0$ par exemple. Revoir l'exercice A.1.16.

   La surface est un hyperboloïde à deux nappes, voir les figures dans le paragraphe "Surfaces-exemples".
5. On montre que la surface est de révolution autour de Oz. On détermine sa nature en étudiant l'intersection avec un plan particulier contenant Oz, $x = 0$ par exemple.

   La surface est un paraboloïde, voir les figures dans le paragraphe "Surfaces-exemples".

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

1. ellipsoïde.

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos u\cos v \\ y = b\sin u\cos v \quad u \in [0,2\pi[,\, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ z = c\sin v \end{array}\right.$$

2. hyperboloïde à une nappe

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos u\, ch v \\ y = b\sin u\, ch v \quad u \in [0,2\pi[,\, v \in \mathbb{R} \\ z = c\, sh v \end{array}\right.$$

3. hyperboloïde à 2 nappes.
   Pour la nappe située à $z \geq c$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos u\, sh v \\ y = b\sin u\, sh v \quad u \in [0,2\pi[,\, v \in \mathbb{R}^+ \\ z = c\, ch v \end{array}\right.$$

   Pour la nappe située à $z \leq -c$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos u\, sh v \\ y = b\sin u\, sh v \quad u \in [0,2\pi[,\, v \in \mathbb{R}^+ \\ z = -c\, ch v \end{array}\right.$$

4. cône de révolution.

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{au}{c}\cos v \\ y = \frac{au}{c}\sin v \quad v \in [0,2\pi[,\, u \in \mathbb{R} \\ z = u \end{array}\right.$$

5. cône .

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{au}{c}\cos v \\ y = \frac{bu}{c}\sin v \quad v \in [0,2\pi[,\, u \in \mathbb{R} \\ z = u \end{array}\right.$$

6. paraboloïde.

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

$$\left\{\begin{array}{l} x = R\cos\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\cos\phi \\ z = R\sin\phi \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array}$$

Voir figure qui suit

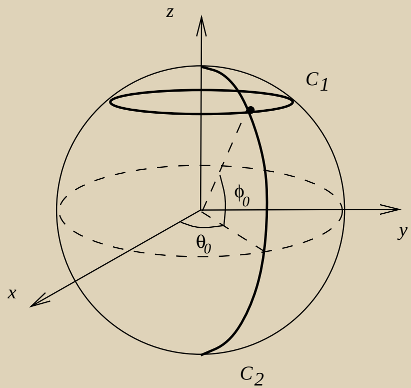


FIGURE C.11 – méridien-parallèle

En géographie C_1 s'appelle un parallèle (cercle), C_2 s'appelle un méridien (demi-cercle).

Retour à l'exercice ▲

Ecrire les équations paramétriques de la sphère.

$$\vec{T}_\theta \wedge \vec{T}_\phi = (\cos\phi_0)\overrightarrow{\Omega M_0}$$

on retrouve bien un vecteur normal proportionnel au rayon, on obtient l'équation du plan tangent

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.31

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 2(x_0 - a) \\ 2(y_0 - b) \\ 2(z_0 - c) \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{\Omega M_0}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.32

On utilise l'équation implicite $f(x, y, z) = 0$. On calcule les dérivées partielles de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{2x_0}{a^2}, \ldots$$

d'où l'équation du plan :

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.33

Une équation cartésienne implicite de la surface est $\phi(x, y) - z = 0$

On calcule les dérivées partielles de la fonction f définie par

$$f(x, y, z) = \phi(x, y) - z$$

On en déduit l'équation du plan tangent.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.8

1. Trouver une équation implicite d'une surface, c'est écrire l'équation de la surface sous la forme $f(x, y, z) = 0$.
   L'équation implicite de $\mathscr{S}_1$ est $x + y + z - 1 = 0$. $\mathscr{S}_1$ est un plan.
   L'équation implicite de $\mathscr{S}_2$ est $\phi(x, y, z) = 0$, où $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$. $\mathscr{S}_2$ est un paraboloïde de révolution autour de l'axe des z.
2. (a) Soit $M_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathscr{S}_2$. Voici deux méthodes pour trouver un vecteur normal à $\mathscr{S}_2$ au point M_2 :
   • En utilisant l'équation implicite $\phi(x, y, z) = 0$ de $\mathscr{S}_2$.
   $\mathrm{grad}\phi_{(M_2)} = (2x_2, 2y_2, -1)$ est un vecteur normal en M_2 à cette surface.
   • En utilisant les équations paramétriques de $\mathscr{S}_2$.

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} x & = & u \\ y & = & v \\ z & = & u^2 + v^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2$$

   Comme $M_2 \in \mathscr{S}_2$, il existe u_2 et $v_2 \in \mathbb{R}$ tels que $M_2 = M(u_2, v_2)$.

$$\overrightarrow{U}_2 = \frac{\partial M}{\partial u}(u_2, v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u_2 \end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{V}_2 = \frac{\partial M}{\partial v}(u_2, v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v_2 \end{pmatrix}$$

   sont 2 vecteurs directeurs du plan tangent à $\mathscr{S}_2$ en M_2. On obtient alors un vecteur normal par

$$\overrightarrow{N}_2 = \overrightarrow{U}_2 \wedge \overrightarrow{V}_2 = \begin{pmatrix} -2u_2 \\ -2v_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   qui est bien colinéaire à $\mathrm{grad}\phi_{(M_2)}$ car $u_2 = x_2$ et $v_2 = y_2$.

   M(x,y,z) appartient au plan tangent à $\mathscr{S}_2$ en M_2 ssi $\overrightarrow{M_2M}$ est orthogonal à $\overrightarrow{N}_2$, ce qui s'écrit :
   $\overrightarrow{M_2M} \cdot \overrightarrow{N}_2 = 0$, soit encore $-2x_2(x - x_2) - 2y_2(y - y_2) + (z - z_2) = 0$.

(b) M_2 appartient aussi à $\mathscr{S}_1$, donc il appartient à la courbe C.
Un vecteur $\overrightarrow{T}$ tangent à $\mathscr{C}$ appartient aux 2 plans tangents à $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, donc il est normal à la fois à $\overrightarrow{N}_1$ et $\overrightarrow{N}_2$.
On peut donc prendre $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{N}_1 \wedge \overrightarrow{N}_2$.
De l'équation du plan $\mathscr{S}_1$, on tire $\overrightarrow{N}_1 = (1,1,1)$ et donc

$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} 1+2y_2 \\ -1-2x_2 \\ 2x_2-2y_2 \end{pmatrix}$$

$M = (x, y, z)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}$ en M_2 ssi il existe t$\in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{M_2M} = t\overrightarrow{T}$, d'où les équations paramétriques de cette tangente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-x_2 & = & t(1+2y_2) \\ y-y_2 & = & t(-1-2x_2) \\ z-z_2 & = & t(2x_2-2y_2) \end{array} \right.$$

3. Le système suivant permet de déterminer l'intersection :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ z & = & x^2+y^2 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ 1-x-y & = & x^2+y^2 \end{array} \right.$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ (x+1/2)^2+(y+1/2)^2 & = & 3/2 \end{array} \right.$$

$\mathscr{C} = \mathscr{S}_1 \cap$ le cylindre de révolution d'axe $x = -1/2$, $y = -1/2$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

On utilise $\theta \in [0, 2\pi[$ pour paramétrer le cylindre et z est alors déterminé pour que le point appartienne aussi au plan S_1.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x+1/2 & = & r\cos\theta \\ y+1/2 & = & r\sin\theta \\ z & = & 1-x-y & = & 2-r\cos\theta - r\sin\theta \end{array}\right.$$

Les coordonnées du vecteur tangent sont les dérivées partielles des coordonnées de $\mathscr{C}$ par rapport au paramètre θ.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & = & -r\sin\theta & = & -\frac{1}{2}-y \\ \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & = & r\cos\theta & = & x+\frac{1}{2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\theta} & = & r\sin\theta - r\cos\theta & = & y-x \end{array}\right.$$

qui est bien colinéaire au vecteur $\overrightarrow{T}$ calculé en 2.

Retour à l'exercice ▲