

MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

Chapitre 5 : Intégrale triple

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT



Chapitre 5

Intégrale triple

5.1	Construction	3
5.2	Propriétés de l'intégrale triple	8
5.3	Calcul pratique des intégrales triples	12
5.4	Des applications	32

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.1 Construction

5.1.1	Volume d'un ensemble de \mathbb{R}^3	4
5.1.2	Définition de l'intégrale triple	6

Il s'agit ici de généraliser les résultats du chapitre précédent, et notamment de donner un sens à la notation :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

où $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ avec D une partie bornée de \mathbb{R}^3 .

On ne possède pas de représentation vraiment concrète des intégrales triples alors qu'on pouvait interpréter une intégrale double comme un *volume* et une intégrale simple comme une *aire*.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.1.1 Volume d'un ensemble de \mathbb{R}^3

On se pose ici le problème de savoir sur quel genre d'ensemble D on va pouvoir calculer une intégrale triple.

Définition 5.1.1. *Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^3$ est **borné** s'il existe un parallélépipède $P = [a; b] \times [c, d] \times [\gamma, \delta]$ tel que $D \subset P$.*

Comme au chapitre précédent, si on se fixe le parallélépipède P pour un ensemble D donné, on peut le découper en plus petits parallélépipèdes, suivant des plans parallèles à (xOy) , (xOz) , (yOz) . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}$$

$$y_j = c + j \frac{d-c}{n}$$

$$z_k = \gamma + k \frac{\delta-\gamma}{n}$$

pour $i, j, k = 0, 1, 2, \dots, n$, ce qui définit les parallélépipèdes $P_{i,j,k}$:

$$P_{i,j,k} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

Définition 5.1.2. *Pour n donné, on note D_n^+ l'ensemble obtenu en prenant tous les $P_{i,j,k}$ de ce maillage ayant au moins un point commun avec D , $D \subset D_n^+$.*

On note D_n^- l'ensemble obtenu en prenant tous les $P_{i,j,k}$ du maillage entièrement contenus dans D , $D_n^- \subset D$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On définit les *volumes* \mathcal{V}_n^- et \mathcal{V}_n^+ respectifs de D_n^- et D_n^+ comme étant la somme des volumes des $P_{i,j,k}$ les formant.

$$\left(\forall (i, j, k) \quad \mathcal{V}(P_{i,j,k}) = \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} \right)$$

Définition 5.1.3. On dira qu'une partie bornée D de \mathbb{R}^3 est **cubable** si :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{2^p}^- = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{V}_{2^p}^+$$

et on définira le **volume** de D , noté $\mathcal{V}(D)$ comme étant la limite commune des deux suites.

Dans le même esprit qu'au chapitre précédent, la plupart du temps, on considérera des ensembles D limités par des surfaces régulières (définies par des équations cartésiennes ou paramétriques faisant intervenir des fonctions différentiables...), ce qui assurera que ces ensembles sont cubables.

Volume d'un ensemble de \mathbb{R}^3

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.1.2 Définition de l'intégrale triple

On considère une partie cubable D de \mathbb{R}^3 et on réutilise ici les notations du paragraphe V.1. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et bornée sur D , on prolonge, comme au chapitre précédent, f au parallélépipède P en posant :

$$f(x, y, z) = 0 \text{ pour } (x, y, z) \in P \setminus D$$

on pose également :

$$M = \sup_{(x,y,z) \in P} f(x, y, z) \quad m = \inf_{(x,y,z) \in P} f(x, y, z)$$

On pose enfin, pour $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$ et $0 \leq k \leq n-1$:

$$M_{i,j,k} = \sup_{(x,y,z) \in P_{i,j,k}} f(x, y, z) \quad m_{i,j,k} = \inf_{(x,y,z) \in P_{i,j,k}} f(x, y, z)$$

Définition 5.1.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les **sommes de Riemann** associées à f et au découpage d'ordre n de D en posant :

$$s_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} m_{i,j,k} \mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

et

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} M_{i,j,k} \mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

$$\text{avec } \mathcal{V}(P_{i,j,k}) = \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} \quad \forall (i, j, k).$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On est alors en mesure de définir l'intégrale de f sur D :

Définition 5.1.5. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable** sur D si :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} s_{2^p}(f) = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_{2^p}(f)$$

Cette limite est l'**intégrale triple** de f sur l'ensemble cubable D , on note ce nombre :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

Définition de l'intégrale triple

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.2 Propriétés de l'intégrale triple

5.2.1	Retour au volume d'un ensemble	9
5.2.2	Propriétés élémentaires	10
5.2.3	Quelques inégalités	11

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.2.1 Retour au volume d'un ensemble

Exercices :

[Exercice A.1.1](#)

Si on considère la fonction f définie par $f(x, y, z) = 1$ pour $(x, y, z) \in D = [a, b] \times [c, d] \times [\gamma, \delta]$, il est facile de voir, avec la définition de

$$\iiint_{[a,b] \times [c,d] \times [\gamma,\delta]} f(x, y, z) dx dy dz$$

que cette intégrale triple vaut $\mathcal{V}(D) = (b - a)(d - c)(\delta - \gamma)$.

De manière générale, on a la :

Proposition 5.2.1. *Pour un ensemble cubable $D \subset \mathbb{R}^3$,*

$$\iiint_D dx dy dz = \mathcal{V}(D)$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.2.2 Propriétés élémentaires

Elles sont, pour l'essentiel, analogues à celles obtenues pour l'intégrale double :

Proposition 5.2.2 (linéarité de l'intégrale).

$$\int \int \int_D (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dx dy dz = \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz + \int \int \int_D g(x, y, z) dx dy dz$$

$$\int \int \int_D \lambda f(x, y, z) dx dy dz = \lambda \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

où f, g sont des fonctions intégrables sur D et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 5.2.3. Soient D_1 et D_2 deux ensembles cubables disjoints, alors $D_1 \cup D_2$ est cubable et :

$$\int \int \int_{D_1 \cup D_2} f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz + \int \int \int_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.2.3 Quelques inégalités

Proposition 5.2.4. 1. Si $f(x, y, z) \geq 0$ sur D , alors

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \geq 0$$

2. Si $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ sur D , alors

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \int \int \int_D g(x, y, z) dx dy dz$$

Proposition 5.2.5. Si f est une fonction intégrable sur D , alors $|f|$ est intégrable sur D et

$$\left| \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \int \int \int_D |f(x, y, z)| dx dy dz \leq \mathcal{V}(D) \sup_{(x,y,z) \in D} |f(x, y, z)|$$

où $\mathcal{V}(D) = \int \int \int_D dx dy dz$.

Proposition 5.2.6. Si $f(x, y, z) \geq 0$ sur D_2 et $D_1 \subset D_2$ alors

$$\int \int \int_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int \int \int_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Proposition 5.2.7 (inégalité de Schwarz).

$$\left(\int \int \int_D f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz \right)^2 \leq \left(\int \int \int_D [f(x, y, z)]^2 dx dy dz \right) \left(\int \int \int_D [g(x, y, z)]^2 dx dy dz \right)$$

où f, g sont des fonctions intégrables sur D .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

5.3 Calcul pratique des intégrales triples

5.3.1	Intégrale sur un parallélépipède, cas des variables séparables	13
5.3.2	Calcul avec la méthode des bâtonnets	14
5.3.3	Calcul par la méthode des tranches	19
5.3.4	Changement de variables, généralités	25
5.3.5	Passage aux coordonnées cylindriques	27
5.3.6	Passage aux coordonnées sphériques	30

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.3.1 Intégrale sur un parallélépipède, cas des variables séparables

C'est l'analogie du résultat obtenu pour l'intégrale double

Proposition 5.3.1. Soit D le parallélépipède $[a; b] \times [c; d] \times [\gamma; \delta]$ où $a \leq b$, $c \leq d$, $\gamma \leq \delta$. Si

$$\forall (x, y, z) \in D \quad f(x, y, z) = g(x)h(y)l(z)$$

où g , h et l sont des fonctions continues sur $[a; b]$, $[c; d]$ et $[\gamma; \delta]$ respectivement, alors

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y) dy \right) \cdot \left(\int_\gamma^\delta l(z) dz \right)$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.3.2 Calcul avec la méthode des bâtonnets

On suppose que l'ensemble d'intégration D considéré peut être défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in A, \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$$

où A est une partie de \mathbb{R}^2 et ϕ_1, ϕ_2 des fonctions de A dans \mathbb{R} , on pourrait dire que A est l'ombre de D sur le plan (xOy) si on éclaire D suivant (Oz) (cf. figure V.3.1). D est alors un cylindre formé sur la courbe limitant A que l'on a fermé avec les surfaces

$$\Sigma_1 : z = \phi_1(x, y) \text{ et } \Sigma_2 : z = \phi_2(x, y)$$

Théorème 5.3.1. *Sous ces hypothèses faites sur D , si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, on a :*

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int_A \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

Le calcul de $F(x, y) = \int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ correspond à un découpage de D suivant des bâtonnets parallèles à (Oz) (cf. figure V.3.2), dont la section infinitésimale correspond au quadrillage de l'ensemble A .

On rassemble tous ces bâtonnets lorsque l'on calcule

$$\int \int_A F(x, y) dx dy$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

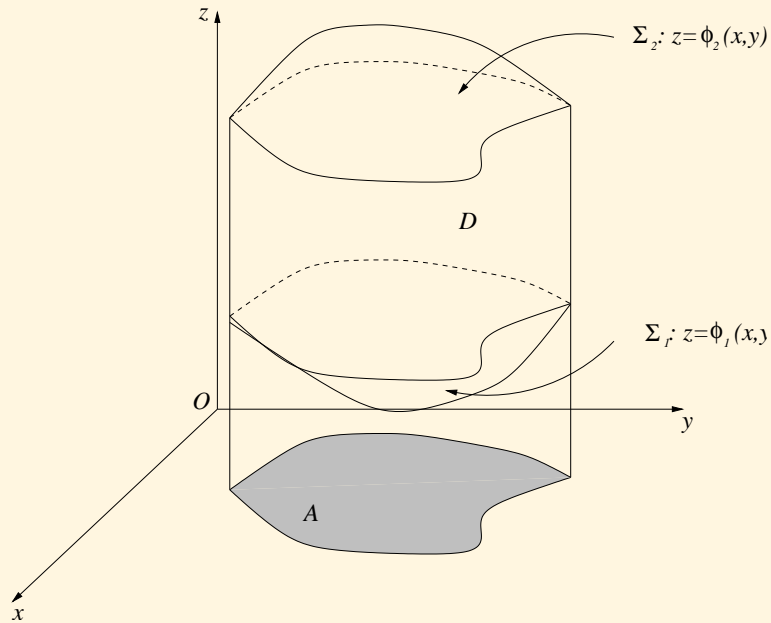


FIGURE 5.3.1 – Ensemble pour lequel on peut appliquer la méthode des bâtonnets

Calcul avec la méthode des bâtonnets

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

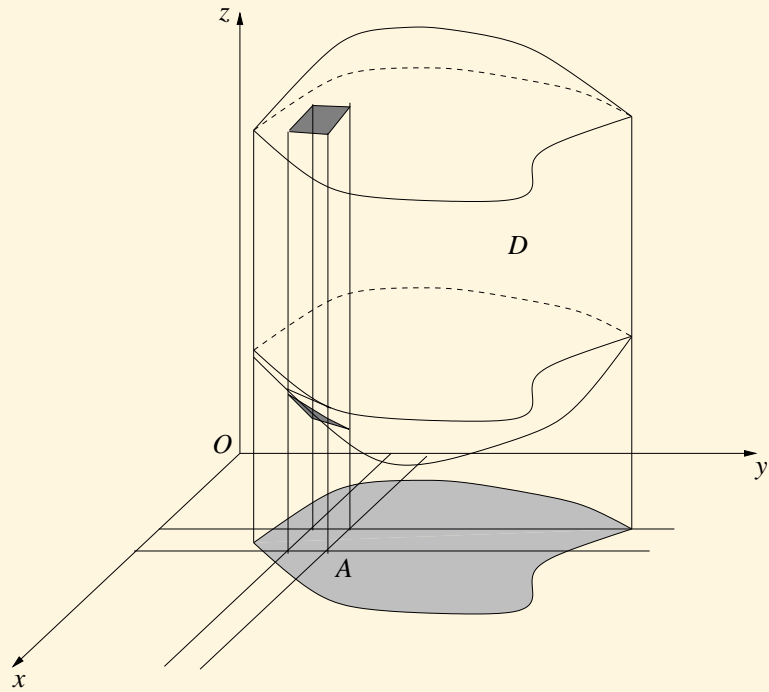


FIGURE 5.3.2 – Un bâtonnet

**Calcul avec la
méthode des
bâtonnets**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Remarque 5.3.1. Pour obtenir le volume de D , on peut dans ce cas écrire :

$$\mathcal{V}(D) = \iint_A (\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y)) \, dx \, dy$$

Exemple 5.3.1. Soit l'ensemble $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in A, x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}$ où

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calculons

$$I = \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$$

On se trouve sous les hypothèses du théorème :

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \left(\int_{x^2+y^2}^2 z \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= \iint_A \left(2 - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right) \, dx \, dy \end{aligned}$$

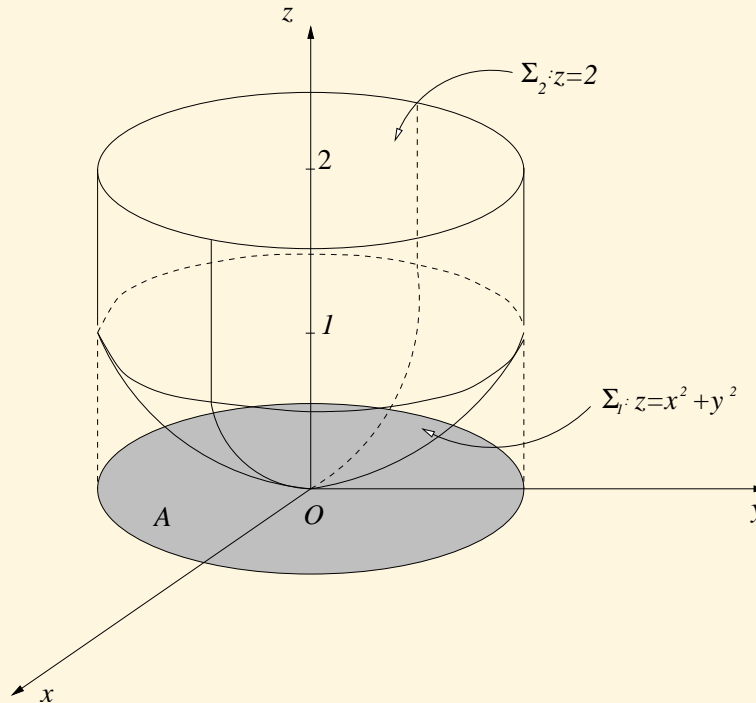
On est donc ramené à des techniques de calcul évoquées au chapitre précédent. Si on passe en coordonnées polaires, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int \int_{[0;1] \times [0;2\pi]} \left(2 - \frac{r^4}{2} \right) r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r^2 - \frac{r^6}{12} \right]_{r=0}^{r=1} \, d\theta \\ I &= \frac{11\pi}{6} \end{aligned}$$

**Calcul avec la
méthode des
bâtonnets**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



Calcul avec la méthode des bâtonnets

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.3.3 Calcul par la méthode des tranches

On suppose, ce qui n'exclut pas forcément le cas précédent, que l'ensemble cubable D peut être défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \gamma \leq z \leq \delta, (x, y) \in D_z\}$$

où D_z est une partie quarrable de \mathbb{R}^2 qui dépend de la cote z et qui correspond à la coupe de l'ensemble D suivant un plan parallèle à (xOy) (cf. figure V.3.3) : $D_{z_0} = D \cap \mathcal{P}_0$ où \mathcal{P}_0 est le plan d'équation $z = z_0$.

Théorème 5.3.2. *Sous ces hypothèses faites sur D , si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, on a :*

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

Cela correspond cette fois à un découpage de l'ensemble D en tranches D_z parallèles à (xOy) , on calcule, à z fixé :

$$F(z) = \int \int_{D_z} f(x, y, z) dx dy$$

grâce aux méthodes du chapitre précédent, puis on empile ces tranches pour le calcul de :

$$\int_{\gamma}^{\delta} F(z) dz = \int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

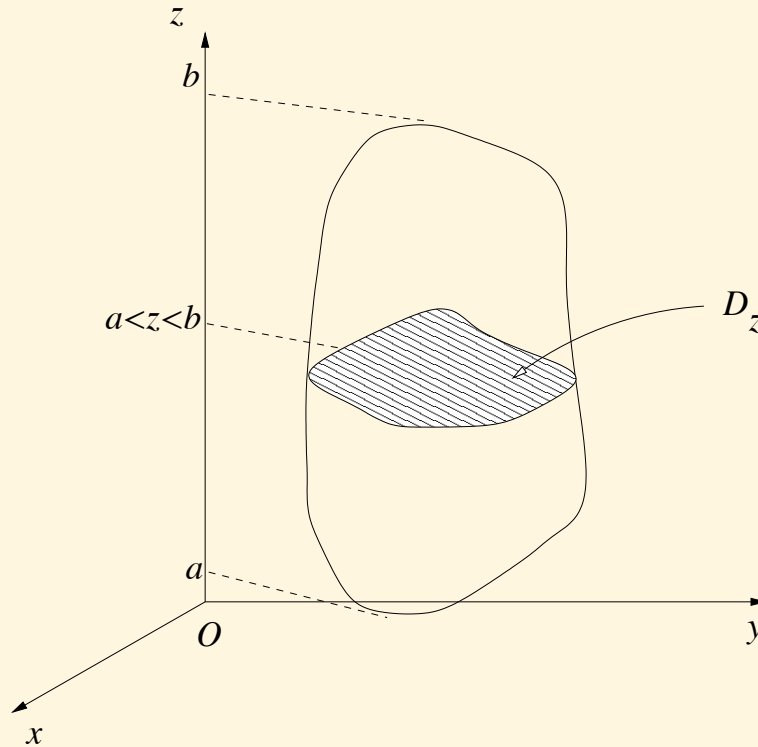


FIGURE 5.3.3 – Méthode des tranches

Calcul par la méthode des tranches

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Remarque 5.3.2. – On peut, bien sûr, selon la commodité des calculs, découper en tranches parallèlement à (xOz) ou (yOz) , ce qui conduira à des égalités de la forme :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d \left(\int \int_{D_y} f(x, y, z) dx dz \right) dy$$

ou

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int \int_{D_x} f(x, y, z) dy dz \right) dx$$

– Si on veut calculer le volume d'un ensemble cubable D , l'application du théorème, lorsque l'ensemble D s'y prête, conduit à :

$$V(D) = \int_\gamma^\delta \mathcal{A}(D_z) dz$$

où $\mathcal{A}(D_z)$ est l'aire de D_z , formule qui ne vous est pas inconnue.

Exemple 5.3.2. Calculons

$$I = \int \int \int_D x^3 y^2 z dx dy dz$$

où l'ensemble D est défini par :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème, on est amené à redéfinir autrement l'ensemble D :

Soit $z_0 \in \mathbb{R}^+$ et \mathcal{P}_{z_0} le plan d'équation $z = z_0$.

$$D \cap \mathcal{P}_{z_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, xy \geq z_0\}$$

**Calcul par la
méthode des
tranches**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Si on note $D_{z_0} = D \cap \mathcal{P}_{z_0}$, on peut écrire :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq 1, (x, y) \in D_z\}$$

car on a $D_z = \emptyset$ pour $z > 1$.

On peut alors tenter une représentation des ensembles D_{z_0} et de l'ensemble D (cf. figure V.3.4).

L'application du théorème conduit à :

$$I = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} x^3 y^2 z dx dy \right) dz$$

On est, là-encore, ramené aux méthodes de calcul du chapitre précédent : pour $0 \leq z \leq 1$, posons :

$$\begin{aligned} F(z) &= \iint_{D_z} x^3 y^2 z dx dy \\ &= z \int_{\sqrt{z}}^1 \left(\int_x^x x^3 y^2 dy \right) dx \end{aligned}$$

(On voit ici l'importance d'un schéma pour déterminer les bornes d'intégration)

Calcul par la méthode des tranches

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

$$\begin{aligned} F(z) &= z \int_{\sqrt{z}}^1 x^3 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{\frac{z}{x}}^x dx \\ &= z \int_{\sqrt{z}}^1 \left(\frac{x^6}{3} - \frac{z^3}{3} \right) dx \\ &= z \left[\frac{x^7}{21} - \frac{z^3 x}{3} \right]_{\sqrt{z}}^1 \\ F(z) &= \frac{z}{21} - \frac{z^4}{3} - \frac{z^{\frac{9}{2}}}{21} + \frac{z^{\frac{9}{2}}}{3} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$I = \int_0^1 F(z) dz = \frac{1}{110}$$

**Calcul par la
méthode des
tranches**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Calcul par la méthode des tranches

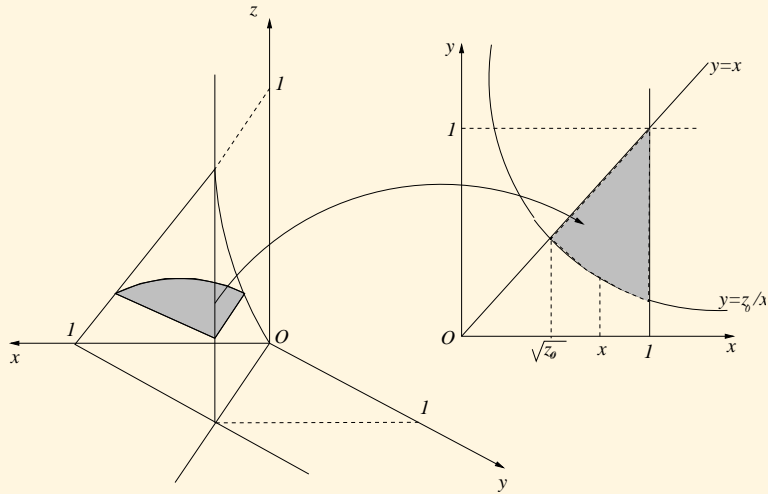


FIGURE 5.3.4 – Représentation de l'ensemble d'intégration

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.3.4 Changement de variables, généralités

Exercices :

[Exercice A.1.2](#)

Là encore, on généralise ce qui a été vu au chapitre précédent.

Soient D et Δ des ensembles cubables de \mathbb{R}^3 , on notera :

- (x, y, z) les points de D ;
- (u, v, w) les points de Δ .

Définition 5.3.1. On désignera par **changement de variables** de Δ sur D toute application :

$$\Phi : \Delta \longrightarrow D$$

$$(u, v, w) \longmapsto \Phi(u, v, w) = \begin{pmatrix} \alpha(u, v, w) \\ \beta(u, v, w) \\ \gamma(u, v, w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}$$

telle que :

- Φ est bijective de Δ sur D ;
- α , β et γ sont des fonctions \mathcal{C}^1 sur Δ ;
- Si on écrit u , v et w en fonction de $(x, y, z) \in D$ à l'aide de Φ^{-1} (bijection réciproque), on obtient encore des fonctions \mathcal{C}^1 sur D .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Définition 5.3.2. On appelle **jacobien** d'un changement de variables Φ l'expression, donnée par le **produit mixte** des vecteurs $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial w}$:

$$J_{\Phi}(u, v, w) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial u} & \frac{\partial \alpha}{\partial v} & \frac{\partial \alpha}{\partial w} \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} & \frac{\partial \beta}{\partial v} & \frac{\partial \beta}{\partial w} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} & \frac{\partial \gamma}{\partial v} & \frac{\partial \gamma}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Théorème 5.3.3. Soient Δ , D deux ensembles bornés et cubables de \mathbb{R}^3 , $\Phi : \Delta \rightarrow D$ est un changement de variables de Δ sur D . On suppose que la fonction

$$(u, v, w) \longmapsto J_{\Phi}(u, v, w)$$

reste bornée sur Δ . Supposons que $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $D = \Phi(\Delta)$, alors la fonction

$$(u, v, w) \longmapsto f \circ \Phi(u, v, w)$$

est intégrable sur Δ et on a :

$$\int \int \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} f(\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w)) |J_{\Phi}(u, v, w)| du dv dw$$

Il s'agit là-encore de s'adapter à la géométrie de l'ensemble sur lequel on calcule l'intégrale triple considérée (lorsque cela entraîne des calculs plus faciles...) : il y a une déformation des éléments de volume servant à découper l'ensemble D (cf. figures V.3.5, pour les coordonnées cylindriques), on utilise en quelque sorte des parallélépipèdes curvilignes.

Changement de variables, généralités

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.3.5 Passage aux coordonnées cylindriques

Les formules de changement de variables sont dans ce cas :

$$\Phi : (\rho, \theta, z) \mapsto \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \\ y(\rho, \theta, z) = \rho \sin \theta \\ z(\rho, \theta, z) = z \end{pmatrix}$$

Le triplet (ρ, θ, z) constitue un système de coordonnées cylindriques. En choisissant $\rho > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ on définit une bijection de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ (éventuellement une bijection d'un sous-ensemble Δ sur un autre sous-ensemble D).

$$\forall (\rho, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Pour passer en coordonnées cylindriques dans une intégrale triple, on remplace

- D par le domaine des (θ, ρ, z) correspondant $(\Phi^{-1}(D) = \Delta)$;
- $f(x, y, z)$ par $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$;
- $dx dy dz$ par $\rho d\theta d\rho dz$.

Exemple 5.3.3. Calcul du volume d'un ellipsoïde de révolution par rapport à l'axe (Oz) :

Soit l'ensemble D défini par

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

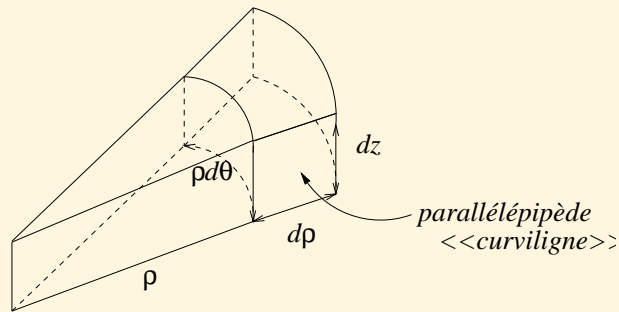


FIGURE 5.3.5 – Élément de volume en coordonnées cylindriques

où c est strictement positif; on a en fait

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, -c\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq c\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right\}$$

ce qui correspond, en coordonnées cylindriques, à l'ensemble

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta, z) / 0 < \rho \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi, -c\sqrt{1 - \rho^2} \leq z \leq c\sqrt{1 - \rho^2} \right\}$$

L'application du théorème conduit dans ce cas à :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} |J_{\phi}(\rho, \theta, z)| d\rho d\theta dz \\ &= \iiint_{\Delta} \rho d\rho d\theta dz \end{aligned}$$

**Passage aux
coordonnées
cylindriques**

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut alors, par exemple, appliquer la méthode des bâtonnets pour calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(D) &= \int \int_{[0;1] \times [0,2\pi]} \rho \left(\int_{-c\sqrt{1-\rho^2}}^{c\sqrt{1-\rho^2}} dz \right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho \left(\int_{-c\sqrt{1-\rho^2}}^{c\sqrt{1-\rho^2}} dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 2c\rho\sqrt{1-\rho^2} d\rho \right) d\theta \\ &= c \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ \mathcal{V}(D) &= \frac{4\pi}{3}c\end{aligned}$$

On retrouve au passage que, lorsque $c = 1$, $\mathcal{V}(D) = \frac{4\pi}{3}$, ce qui est bien le volume d'une sphère de rayon 1.

**Passage aux
coordonnées
cylindriques**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.3.6 Passage aux coordonnées sphériques

Les formules de changement de variables :

$$\Phi : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Le triplet (ρ, θ, φ) constitue un système de coordonnées sphériques. En choisissant $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on définit une bijection de $]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0; 0; 0)\}$ (éventuellement une bijection d'un sous-ensemble Δ sur un autre sous-ensemble D).

$$\forall (\rho, \theta, \varphi) \in]0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \cos \varphi & -\rho \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos \varphi$$

Pour passer en coordonnées sphériques dans une intégrale triple, on remplace

- D par le domaine Δ des (θ, φ, ρ) correspondant $(\Phi^{-1}(D) = \Delta)$;
- $f(x, y, z)$ par $f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$;
- $dx dy dz$ par $\rho^2 |\cos \varphi| d\theta d\varphi d\rho$ (Si $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos \varphi \geq 0$ et $|\cos \varphi| = \cos \varphi$).

Exemple 5.3.4. On veut calculer l'intégrale suivante

$$I = \iiint_D \frac{1}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}} dx dy dz$$

où l'ensemble D est la boule creuse définie par :

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$$

ce qui correspond en coordonnées sphériques à l'ensemble

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta, \phi) / \frac{1}{2} \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

L'application de la formule de changement de variables conduit à :

$$\begin{aligned} I &= \int \int \int_{\Delta} \frac{|\rho^2 \cos \phi|}{\sqrt{9 - \rho^3}} d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\rho^2}{\sqrt{9 - \rho^3}} d\rho \\ &= 4\pi \left[-\frac{2}{3} (9 - \rho^3)^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ I &= \frac{8\pi}{3} \left(\sqrt{\frac{71}{8}} - 1 \right) \end{aligned}$$

**Passage aux
coordonnées
sphériques**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.4 Des applications

5.4.1	Détermination du centre de gravité d'un solide	33
5.4.2	Moments d'inertie	35
5.4.3	Théorème de Guldin	38

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.4.1 Détermination du centre de gravité d'un solide

Exercices :

[Exercice A.1.3](#)

On considère un objet qu'on assimile à un ensemble cubable D de \mathbb{R}^3 .

Définition 5.4.1. On appelle **masse volumique (ou densité)** au point $M \in D$ le réel $\mu(M) = \mu(x, y, z)$ qui représente la masse par unité de volume de cet objet et qui peut dépendre de la position de M (et aussi du matériau avec lequel est fait l'objet).

Définition 5.4.2. On appelle **masse totale** du solide D de \mathbb{R}^3 de masse volumique μ le nombre réel positif m défini par l'intégrale triple :

$$m = \int \int \int_D \mu(M) dx dy dz$$

où M décrit D .

Définition 5.4.3. On appelle **centre d'inertie (ou centre de gravité)** du solide D de \mathbb{R}^3 de masse volumique μ le point G dont les coordonnées sont données par les intégrales triples :

$$x_G = \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) x dx dy dz$$

$$y_G = \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) y dx dy dz$$

$$z_G = \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) z dx dy dz$$

ce qui vectoriellement s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} \\ &= \frac{1}{m} \left(\int \int \int_D \mu(M) x dx dy dz \right) \vec{i} + \frac{1}{m} \left(\int \int \int_D \mu(M) y dx dy dz \right) \vec{j} \\ &\quad + \frac{1}{m} \left(\int \int \int_D \mu(M) z dx dy dz \right) \vec{k} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{m} \int \int \int_D \mu(M) \overrightarrow{OM} dx dy dz \end{aligned}$$

Détermination du centre de gravité d'un solide

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.4.2 Moments d'inertie

Exercices :

[Exercice A.1.4](#)

Avec les mêmes notations que précédemment :

Définition 5.4.4. *Le moment d'inertie du solide D par rapport à la droite Δ est défini par :*

$$\mathcal{I}_{\Delta} = \int \int \int_D [d(M, \Delta)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

où $d(M, \Delta)$ représente la distance du point $M(x, y, z)$ à la droite Δ , i.e. $d(M, \Delta) = \|\overrightarrow{MH}\|$ où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite Δ .

Exemple 5.4.1. *Calcul du moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène, par rapport à son axe de révolution.*

Soit le cylindre occupant l'ensemble $D = \{(x, y, z) / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ avec $a > 0, h > 0$.

$$\mathcal{I}_{Oz} = \int \int \int_D [d(M, (Oz))]^2 \mu dx dy dz$$

avec μ constante.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{Oz} &= \mu \int \int \int_D (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= \mu \int \int \int_{\Delta} \rho^3 d\rho d\theta dz \end{aligned}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

en passant en coordonnées cylindriques avec $\Delta = \{(\rho, \theta, z) / 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{Oz} &= \mu \cdot 2\pi \cdot h \cdot \int_0^a \rho^3 d\rho \\ &= \frac{1}{2} \mu \pi h a^4 \\ \mathcal{I}_{Oz} &= \frac{1}{2} m a^2 \end{aligned}$$

où $m = \mu \pi h a^2$ est la masse du cylindre.

Définition 5.4.5. Le *moment d'inertie du solide D par rapport au point A* est défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_A &= \int \int \int_D [d(M, A)]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz \\ \mathcal{I}_A &= \int \int \int_D ((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2) \mu(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

Définition 5.4.6. Le *moment d'inertie du solide D par rapport au plan \mathcal{P}* est défini par :

$$\mathcal{I}_{\mathcal{P}} = \int \int \int_D [d(M, \mathcal{P})]^2 \mu(x, y, z) dx dy dz$$

où $d(M, \mathcal{P})$ représente la distance du point $M(x, y, z)$ au plan \mathcal{P} , i.e. $d(M, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MH}\|$ où H est le projeté orthogonal du point M sur le plan \mathcal{P} .

On rappelle que les distances évoquées ci-dessus peuvent être calculées simplement en établissant que :

$$d(M, \Delta) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

où M_0 est un point de Δ et \vec{u} est un vecteur directeur de Δ ;

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{\|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

où M_0 est un point de \mathcal{P} et \vec{u} un vecteur normal à \mathcal{P} .

Moments d'inertie

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

5.4.3 Théorème de Pappus

Exercices :

[Exercice A.1.5](#)

On considère un solide de révolution par rapport à l'axe (Oz) : on peut voir ce solide \mathcal{S} comme ce qu'on obtient en faisant tourner une plaque D autour de (Oz) (cf. figure V.4.6).

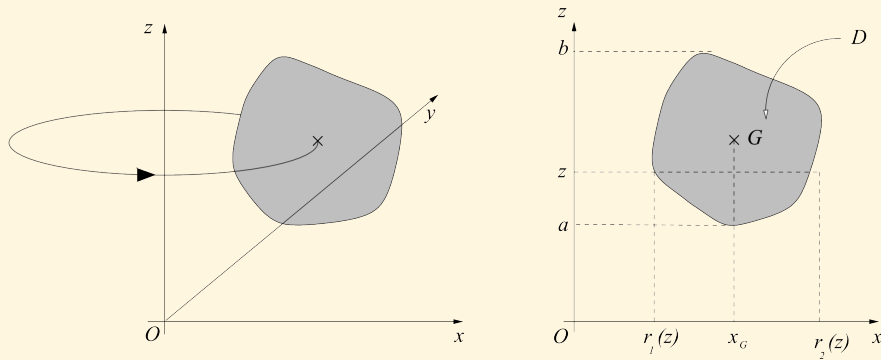


FIGURE 5.4.6 –

Si D est un disque, on obtient un *tore*.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

On voudrait calculer $\mathcal{V}(\mathcal{S})$:

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \int \int \int_{\mathcal{S}} dx dy dz = \int \int \int_{\Delta} \rho d\rho d\theta dz$$

en passant en coordonnées cylindriques, avec :

$$\Delta = \{(\rho, \theta, z) / a \leq z \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi, \rho_1(z) \leq \rho \leq \rho_2(z)\}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b \left(\int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \rho d\rho \right) dz \right) d\theta = 2\pi I$$

en posant :

$$I = \int_a^b \left(\int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \rho d\rho \right) dz$$

Si on regarde, dans le plan (xOz) par exemple, la plaque D comme un objet homogène de masse surfacique $\mu = 1$, l'abscisse x_G de son centre de gravité est donnée par ($m = \mu \mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D)$ est alors la masse de la plaque) :

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \int_a^b \left(\int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} x dx \right) dz = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \int_a^b \left(\int_{\rho_1(z)}^{\rho_2(z)} \rho d\rho \right) dz$$

ce qui permet d'écrire :

$$I = m x_G = x_G \mathcal{A}(D)$$

d'où

$$\boxed{\mathcal{V}(\mathcal{S}) = 2\pi I = 2\pi x_G \mathcal{A}(D)}$$

En résumé, le volume engendré par la rotation de D autour de l'axe (Oz) est le produit du trajet parcouru par le centre de gravité de D (cercle de rayon x_G) par l'aire de D .

Théorème de Guldin

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Annexe A

Exercices

A.1	Exercices de cours	41
A.2	Exercices de TD	47

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

A.1 Exercices de cours

A.1.1	Chap5-Exercice1	42
A.1.2	Chap5-Exercice2	43
A.1.3	Chap5-Exercice3	44
A.1.4	Chap5-Exercice4	45
A.1.5	Chap5-Exercice5	46

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.1 Chap5-Exercice1

Démontrer la proposition V.2.1 dans le cas d'un parallélépipède $D = [a, b] \times [c, d] \times [\gamma, \delta]$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.2 Chap5-Exercice2

En s'inspirant de la géométrie de $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$, ensemble limité par l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

trouver un changement de variables qui permette un calcul facile du volume $\mathcal{V}(\mathcal{E})$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.3 Chap5-Exercice3

Soit B une demi-boule homogène (de masse volumique constante égale μ) définie par

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

Calculer les coordonnées de son centre de gravité G .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.4 Chap5-Exercice4

Reprendre la demi-boule de l'exercice [A.1.3](#) et calculer :

1. son moment d'inertie par rapport à l'axe (Oz) ;
2. son moment d'inertie par rapport à O .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.5 Chap5-Exercice5

Calculer le volume d'un solide \mathcal{S} engendré par la rotation d'une plaque de forme circulaire de rayon R autour de l'axe (Oz) .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

A.2 Exercices de TD

A.2.1	Fubini	48
A.2.2	Fubini, coordonnées cylindriques	49
A.2.3	coordonnées sphériques	50
A.2.4	Fubini, des bâtons et des tranches	51
A.2.5	Fubini, des bâtons et des tranches	52
A.2.6	Fubini	53
A.2.7	intersection sphère-cylindre	54
A.2.8	intersection sphère-cône	55
A.2.9	variables sphériques	56
A.2.10	ellipsoïde/8	57

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.1 Fubini

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x \geq 0, z \geq 0, x - 2y + 2z \leq 0, y \leq 1\}$$

1. Faire une figure et exprimer de plusieurs façons $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ à l'aide d'intégrales simples.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité de \mathcal{V} qu'on supposera homogène pour l'occasion.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.2 Fubini, coordonnées cylindriques

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

1. Faire une figure et exprimer de plusieurs façons $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ à l'aide d'intégrales simples.
2. Calculer le volume de \mathcal{V} en utilisant l'une des expressions obtenues.
3. Calculer le volume de \mathcal{V} en utilisant un changement de variables en coordonnées cylindriques.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.3 coordonnées sphériques

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 \leq 4\}$$

1. Faire une figure et exprimer $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ à l'aide des coordonnées sphériques.
2. Calculer le volume de \mathcal{V} .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.4 Fubini, des bâtons et des tranches

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z + x^2 + y^2 \leq 4, \quad z + 2y \geq 1\}$$

1. Faire une figure.
2. (a) Quelle est la projection de \mathcal{V} sur le plan $z = 0$?
(b) Quelle est la projection de \mathcal{V} sur le plan $x = 0$?
(c) Quelle est l'intersection de \mathcal{V} avec le plan $y = b$?
3. En déduire trois façons de calculer $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$.
4. Calculer le volume de \mathcal{V} .

Solution

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.5 Fubini, des bâtons et des tranches

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - 2y\}$$

1. Faire une figure.
2. (a) Quelle est la projection de \mathcal{V} sur le plan $z = 0$?
(b) Quelle est la projection de \mathcal{V} sur le plan $x = 0$?
(c) Quelle est l'intersection de \mathcal{V} avec le plan $y = b$?
(d) Quelle est l'intersection de \mathcal{V} avec le plan $z = c$?
3. En déduire quatre façons de calculer $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$.
4. Calculer le volume de \mathcal{V} .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.6 Fubini

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \geq 2, 2y + x \leq 6, y^2 + z^2 \leq 4\}$$

1. Faire une figure et exprimer $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ à l'aide d'intégrales simples.
2. Calculer $\int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz$ lorsque $f(x, y, z) = z$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.7 intersection sphère-cylindre

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 \leq \frac{R^2}{4} \right\}$$

Faire une figure et calculer le volume de \mathcal{V} .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.8 intersection sphère-cône

Calculer le volume de l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ et du cône d'équation $x^2 + y^2 \leq z^2$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.9 variables sphériques

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$$

Calculer l'intégrale triple $\int \int \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.10 ellipsoïde/8

On considère le domaine de \mathbb{R}^3 défini par

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

En supposant que la masse volumique vaut 1, calculer la masse et le moment d'inertie de \mathcal{V} par rapport à l'origine.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le roman à un grain où le concept est mentionné.

C

Centre de gravité	33
Changement de variables	25
Coordonnées cylindriques (changement de variables en)	27
Coordonnées sphériques (changement de variables en)	30

E

Ensemble cubable	4
------------------------	----------

I

Intégrale triple	6
Intégrales sur un parallélépipède	13

L

Linéarité	10
-----------------	-----------

M

Méthode des bâtonnets	14
Méthodes des tranches	19
Moments d'inertie	35

P

Positivité-Comparaison de deux intégrales ..	11
--	-----------

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



T

Théorème de Guldin **38**

V

Volume **9**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Solution de l'exercice A.1.1

Dans ce cas là, on a, pour tout n entier non nul :

$$s_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1\mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

et

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1\mathcal{V}(P_{i,j,k})$$

avec $\mathcal{V}(P_{i,j,k}) = \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} \quad \forall (i, j, k)$ d'où

$$s_n(f) = S_n(f) = n^3 \frac{(b-a)(d-c)(\delta-\gamma)}{n^3} = (b-a)(d-c)(\delta-\gamma)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.2

On peut s'inspirer des coordonnées sphériques, puisque, pour $a = b = c$, l'ellipsoïde considéré est une sphère.

Utiliser le changement de variables :

$$\begin{cases} x &= a\rho \cos\theta \cos\phi \\ y &= b\rho \sin\theta \cos\phi \\ z &= c\rho \sin\phi \end{cases} \quad (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0; 2\pi[\times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Le jacobien de ce changement est $abc\rho^2 \cos\phi$ et on obtient

$$\mathcal{V}(\mathcal{E}) = \frac{4}{3}\pi abc$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.3

Pour des raisons de symétrie, on doit trouver $x_G = y_G = 0$ et utiliser, bien sûr, les coordonnées sphériques pour calculer z_G .

La masse de la demi-boule est $m = \frac{2}{3}\pi R^3 \mu$ et

$$z_G = \frac{\mu}{m} \int \int \int_{[0;R] \times [0;2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]} \rho \sin \phi \rho^2 \cos \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{3R}{8}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.4

En reprenant les notations de l'exercice [A.1.3](#), on obtient $\frac{2}{5}mR^2$ pour le moment par rapport à l'axe Oz et $\frac{3}{5}mR^2$ pour le moment par rapport au point O .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.5

$\mathcal{V}(\mathcal{S}) = 2\pi^2 dR^2$ où d est la distance du centre de la plaque à l'axe Oz (en supposant $d > R$).

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.2.4

1. \mathcal{V} est le domaine de \mathbb{R}^3 contenu dans le paraboloïde d'équation $z + x^2 + y^2 \leq 4$ et au-dessus du plan $z + 2y = 1$.
Faire un dessin.
2. (a) Soit \mathcal{P}_z la projection de \mathcal{V} sur $z = 0$. Par définition, on a :

$$(x, y, 0) \in \mathcal{P}_z \iff \exists z \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{V}$$

Et on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \exists z \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{V} &\iff \exists z \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z \leq 4 - x^2 - y^2 \\ z \geq 1 - 2y \end{cases} \\ &\iff 1 - 2y \leq 4 - x^2 - y^2 \\ &\iff x^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \end{aligned}$$

\mathcal{P}_z est donc le disque de centre $(0, 1, 0)$, de rayon 2, situé dans le plan $z=0$.

- (b) On procède comme au (a). Soit \mathcal{P}_x la projection de \mathcal{V} sur le plan $x=0$.

$$\begin{aligned} (0, y, z) \in \mathcal{P}_x &\iff \exists x \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \in \mathcal{V} \\ &\iff \exists x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z \leq 4 - x^2 - y^2 \\ z \geq 1 - 2y \end{cases} \\ &\iff \exists x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x^2 \leq 4 - y^2 - z \\ z \geq 1 - 2y \end{cases} \\ &\iff 0 \leq 4 - y^2 - z \quad \text{et} \quad z \geq 1 - 2y \end{aligned}$$

\mathcal{P}_x est le domaine du plan $x=0$, limité par la parabole

$$\begin{cases} z = 4 - y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

et la droite

$$\begin{cases} z &= -2y + 1 \\ x &= 0 \end{cases}$$

Faire une figure.

(c) L'intersection $\mathcal{J}(b)$ de \mathcal{V} avec le plan $y = b$ est l'ensemble des points (x, y, z) qui vérifient :

$$\begin{cases} y &= b \\ z + x^2 + y^2 &\leq 4 \\ z + 2y &\geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= b \\ z + x^2 &\leq 4 - b^2 \\ z &\geq 1 - 2b \end{cases}$$

Faire une figure.

3. Une projection du domaine va permettre d'appliquer la méthode des bâtonnets (orientés dans la direction de la projection), tandis que les intersections du domaine avec une famille de plans parallèles favorisent l'utilisation de la méthode des tranches.

$$\begin{aligned} \int \int \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz &= \int \int_{\mathcal{P}_z} \left(\int_{1-2y}^{4-x^2-y^2} f(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \int \int_{\mathcal{P}_x} \left(\int_{-\sqrt{4-y^2-z}}^{\sqrt{4-y^2-z}} f(x, y, z) dx \right) dy dz \\ &= \int_{-1}^3 \left(\int \int_{\mathcal{J}(y)} f(x, y, z) dx dz \right) dy \end{aligned}$$

4. Le volume vaut par définition $\mathcal{V} = \int \int \int_{\mathcal{V}} dx dy dz$. On utilise les trois méthodes ci-dessus avec $f(x, y, z) = 1$. Comparez la longueur respective des calculs!

- Première méthode

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\mathcal{D}_z} \left(\int_{1-2y}^{4-x^2-y^2} dz \right) dx dy \\
&= \iint_{\mathcal{D}_z} (4-x^2-y^2-1+2y) dx dy \\
&= \iint_{\mathcal{D}_z} 4-x^2-(y-1)^2 dx dy
\end{aligned}$$

On procède à un changement de variable adapté à la géométrie de \mathcal{D}_z .

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = 1 + r \sin \theta \end{cases}$$

avec $(r, \theta) \in [0, 2] \times [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r^2) r dr d\theta \\
&= 2\pi \left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

• Deuxième méthode

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \iint_{\mathcal{D}_x} \left(\int_{-\sqrt{4-y^2-z}}^{\sqrt{4-y^2-z}} dx \right) dy dz \\
&= \iint_{\mathcal{D}_x} 2\sqrt{4-y^2-z} dy dz
\end{aligned}$$

qui s'intègre par Fubini :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int_{-1}^3 \left(\int_{1-2y}^{4-y^2} 2\sqrt{4-y^2-z} dy dz \right) \\ &= \int_{-1}^3 \left[-\frac{4}{3}(4-y^2-z)^{3/2} \right]_{1-2y}^{4-y^2} dy \\ &= \int_{-1}^3 \frac{4}{3} \underbrace{(4-y^2-1+2y)}_{4-(y-1)^2}^{3/2} dy \end{aligned}$$

Changement de variable : $y = 1 + 2 \sin \theta$ où $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{3} (4 \cos^2 \theta)^{3/2} 2 \cos \theta d\theta$$

et encore $\cos \theta \geq 0$ pour $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, $(\cos^2 \theta)^{1/2} = \cos \theta$.

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{64}{3} \cos^4 \theta d\theta$$

Il faut linéariser $\cos^4 \theta$.

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{i2\theta} + e^{-i\theta}}{16} \\ &= \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$V = \frac{64}{3} \left[\frac{\sin 4\theta}{32} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{3}{8}\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$V = 8\pi$$

• Troisième méthode

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^3 \left(\iint_{\mathcal{D}(y)} f(x, y, z) dx dz \right) dy \\ &= \int_{-1}^3 \left(\int_{-\sqrt{4-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-(y-1)^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{4-y^2-x^2}} dz \right) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^3 \left(\int_{-\sqrt{4-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-(y-1)^2}} (4 - y^2 - x^2 - 1 + 2y) dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^3 \left[(4 - (y-1)^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{4-(y-1)^2}}^{\sqrt{4-(y-1)^2}} dy \\ &= \int_{-1}^3 \left(2(4 - (y-1)^2)^{3/2} - \frac{2}{3}(4 - (y-1)^2)^{3/2} \right) dy \\ &= \int_{-1}^3 \frac{4}{3}(4 - (y-1)^2)^{3/2} dy \end{aligned}$$

On retrouve l'intégrale de la méthode précédente.

[Retour à l'exercice ▲](#)