

MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

Chapitre 6 : Intégrale curviligne-Théorème de Green-Riemann

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT



Chapitre 6

Intégrale curviligne-Théorème de Green Riemann

6.1	Abscisse curviligne	3
6.2	Circulation d'un champ de vecteurs	16
6.3	Théorème de Green-Riemann	24
6.4	Intégrale curviligne d'une forme différentielle	31

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.1 Abscisse curviligne

6.1.1	Abscisse curviligne-définition	4
6.1.2	Abscisse curviligne-démonstration	6
6.1.3	Longueur d'un arc de courbe	9
6.1.4	Calcul de la masse d'un fil	11
6.1.5	Vecteur tangent unitaire	14

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.1.1 Abscisse curviligne-définition

Exercices :

[Exercice A.1.1](#)

La notion d'abscisse sur une droite orientée vous est connue, on peut généraliser cette notion de la façon suivante . L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, soit C une courbe sans point double.

Notations et hypothèses 6.1.1.

- C est une courbe orientée.
- Elle est paramétrée par $(x(t), y(t), z(t))$, on note $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- On choisit une origine Ω sur C , $\Omega = M(t_0)$.
- On suppose que les fonctions x, y, z sont dérivables.

On peut alors définir l'abscisse curviligne de la façon suivante :

Définition 6.1.1. On appelle abscisse curviligne du point M de la courbe C le nombre algébrique s dont la valeur absolue est égale à la longueur de l'arc curviligne ΩM et dont le signe est celui du sens de parcours de ΩM

Voir figure VI.1.1

On démontre, vous pouvez lire la démonstration dans le paragraphe suivant, que

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

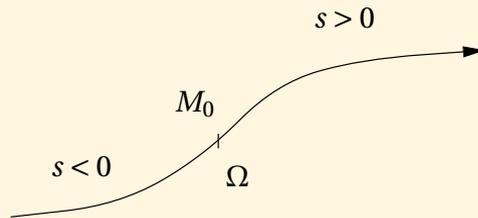


FIGURE 6.1.1 – abscisse curviligne

$$s(t_0) = 0, \quad s'(t) = \epsilon \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

où $\epsilon = 1$ si la courbe est orientée dans le sens des t croissants, $\epsilon = -1$ sinon.

Donc s est la primitive de la fonction $\epsilon \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ qui s'annule en t_0 , on peut donc écrire s sous la forme :

Théorème 6.1.1. Avec les notations VI.1.1, l'abscisse curviligne s sur C est définie par :

$$s(t) = \epsilon \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} du$$

où $\epsilon = 1$ si la courbe est orientée dans le sens des t croissants, $\epsilon = -1$ sinon.

**Abscisse
curviligne-
définition**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.1.2 Abscisse curviligne-démonstration

Exercices :

[Exercice A.1.2](#)

On a défini l'abscisse curviligne dans le paragraphe précédent . On sait déjà par définition que $s(t_0) = 0$ puisque Ω est choisi comme origine.

On va montrer maintenant que

$$s'(t) = c \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

Pour ce faire on se ramène aux longueurs que l'on sait calculer, c'est à dire les longueurs de segments de droites. On fait l'hypothèse naturelle suivante, si $M(t)$ et $M(t+h)$ sont 2 points de la courbe, si on note d_h la distance de $M(t)$ à $M(t+h)$ et ℓ_h la longueur du segment curviligne $M(t)M(t+h)$ alors ces deux infiniment petits sont équivalents , c'est à dire que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell_h}{d_h} = 1$. Voir figure VI.1.2

On suppose que la courbe est orientée dans le sens des t croissants et que h est strictement positif. On a alors :

$$\ell_h = s(t+h) - s(t)$$
$$d_h = \sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2 + (z(t+h) - z(t))^2},$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

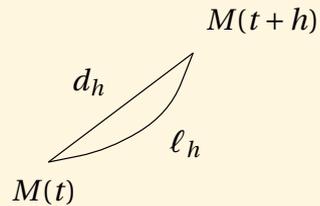


FIGURE 6.1.2 –

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\ell_h}{d_h} &= \frac{s(t+h) - s(t)}{\sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2 + (z(t+h) - z(t))^2}} \\ \frac{\ell_h}{d_h} &= \frac{\frac{s(t+h) - s(t)}{h}}{\sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + \dots + (z(t+h) - z(t))^2}} \\ \frac{\ell_h}{d_h} &= \frac{\frac{s(t+h) - s(t)}{h}}{\sqrt{\frac{(x(t+h) - x(t))^2}{h^2} + \dots + \frac{(z(t+h) - z(t))^2}{h^2}}} \\ \frac{\ell_h}{d_h} &= \frac{\frac{s(t+h) - s(t)}{h}}{\sqrt{\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z(t+h) - z(t)}{h}\right)^2}} \end{aligned}$$

**Abscisse
curviligne-
démonstration**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Montrer en exercice que l'on obtient la même expression quand h est négatif. On choisit donc maintenant h de signe quelconque et on fait tendre h vers zéro, on obtient donc en utilisant les résultats sur les limites :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell_h}{d_h} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}}{\sqrt{\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x(t+h) - x(t))}{h}\right)^2 + \dots + \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z(t+h) - z(t))}{h}\right)^2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ell_h}{d_h} = \frac{s'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}$$

En appliquant l'hypothèse naturelle énoncée précédemment, cette limite vaut 1, donc on obtient :

$$s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

Si la courbe avait été orientée dans le sens des t décroissants, l'abscisse curviligne est alors l'opposée de celle que l'on vient de définir, on aurait donc

$$s'(t) = -\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

D'une façon générale

$$s'(t) = \epsilon \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)},$$

où ϵ est un paramètre qui vaut 1 lorsque la courbe est orientée dans le sens des t croissants, ce paramètre vaut -1 sinon.

Abscisse curviligne- démonstration

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.1.3 Longueur d'un arc de courbe

Exercices :[Exercice A.1.3](#)[Exercice A.1.4](#)[Exercice A.1.5](#)[Exercice A.1.6](#)

A partir de l'abscisse curviligne on peut définir la longueur d'un arc de courbe $M_1 M_2$, en effet :

Théorème 6.1.2. *Soit C une courbe paramétrée par $(x(t), y(t), z(t))$, on suppose que x, y, z sont dérivables, alors :*

$$\text{longueur de l'arc } M_1 M_2 = |s(t_2) - s(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u)} du \right|.$$

La longueur ne dépend ni de l'origine, ni de l'orientation choisie sur la courbe.

Si la courbe est dans le plan xOy , z' est nulle et on peut appliquer la formule précédente. En particulier dans le cas où une courbe est définie par son équation polaire, on obtient le résultat suivant :

Théorème 6.1.3. *Soit C une courbe du plan xOy dont l'équation polaire est $\rho(t)$, on suppose que ρ est dérivable, alors*

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

$$\text{longueur de l'arc } M_1 M_2 = \left| \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\rho^2(u) + \rho'^2(u)} du \right|.$$

Longueur d'un arc de courbe

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.1.4 Calcul de la masse d'un fil

Exercices :

[Exercice A.1.7](#)

Les objets comme les fils peuvent être modélisés par des courbes, si la masse linéique μ (masse par unité de longueur) est constante, alors la masse du fil de longueur ℓ est égale à $m = \mu\ell$. La masse linéique n'est pas toujours constante (c'est le cas d'un fil dont la section ne serait pas constante). Supposons que l'on a défini une abscisse curviligne s sur la courbe C , appelons $\mu(s)$ la fonction qui définit la masse linéique en fonction de l'abscisse curviligne. On cherche à calculer la masse m de la partie de C comprise entre les points A et B d'abscisses curvilignes respectives s_A et s_B , on suppose $s_B > s_A$ (sinon on échange A et B).

On discrétise le segment curviligne \widehat{AB} , soit N un entier, on pose

$$\Delta s = \frac{s_B - s_A}{N}, \quad s_i = s_A + i\Delta s, \quad \text{par hypothèse } \Delta s > 0.$$

On note M_i le point d'abscisse curviligne s_i , on a bien sûr $M_0 = A$, $M_N = B$. Voir figure VI.1.3.

On note m_i la masse du segment curviligne M_iM_{i+1} , on peut écrire

$$m = \sum_{i=0}^{N-1} m_i.$$

Si Δs est faible on peut supposer que la masse linéique varie peu sur le segment curviligne M_iM_{i+1} ,

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

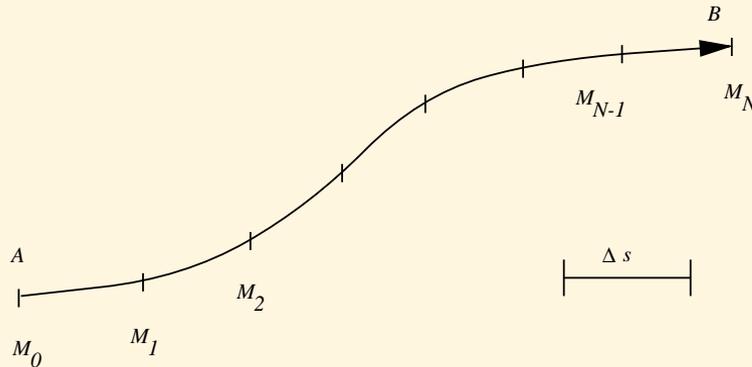


FIGURE 6.1.3 – discrétisation de la courbe

donc la masse du segment curviligne $M_i M_{i+1}$ est peu différente de $\mu(s_i)\Delta s$. Pour être plus précis, on a :

$$m = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \mu(s_i)\Delta s = \int_{s_A}^{s_B} \mu(s) ds.$$

On retrouve en effet la définition de l'intégrale simple de Riemann.

On remarque que la masse m est positive puisque la fonction μ est positive et que $s_A < s_B$.

Plus généralement si s_A et s_B sont quelconques, on a : $m = \left| \int_{s_A}^{s_B} \mu(s) ds \right|$.

Dans la pratique, on ne connaît pas toujours l'abscisse curviligne s , mais plutôt une paramétrisation de C ($x(t), y(t), z(t)$) et la masse linéique est connue en fonction de t , on la note $\tilde{\mu}(t)$.

Si $s(t)$ est la fonction qui définit l'abscisse curviligne en fonction de t , on a la relation $\mu(s(t)) = \tilde{\mu}(t)$. En effectuant un changement de variables dans le calcul de m , on obtient donc la masse du

Calcul de la masse d'un fil

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

fil d'extrémités A et B :

$$m = \left| \int_{t_A}^{t_B} \mu(s(t)) s'(t) dt \right|$$

Théorème 6.1.4. Soit C une courbe d'extrémités A et B paramétrée par $(x(t), y(t), z(t))$, on suppose que x, y, z sont dérivables. On note $\tilde{\mu}(t)$ la masse linéique, alors la masse m de C vaut :

$$m = \left| \int_{t_A}^{t_B} \tilde{\mu}(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \right|$$

Calcul de la masse d'un fil

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.1.5 Vecteur tangent unitaire

Si la courbe C est paramétrée par $x(t), y(t), z(t)$, on a vu que lorsque les fonctions sont dérivables et non toutes simultanément nulles, alors le vecteur $\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \\ \frac{dz}{dt}(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur tangent

à la courbe en $M(t)$.

Si l'on a défini une abscisse curviligne s sur C on peut paramétrer C à l'aide de s et noter $x^*(s), y^*(s), z^*(s)$ les coordonnées en fonction de l'abscisse curviligne. On a donc :

$$x^*(s(t)) = x(t), y^*(s(t)) = y(t), z^*(s(t)) = z(t).$$

Un autre vecteur tangent est donné par $\vec{T}^* = \begin{pmatrix} \frac{dx^*}{ds}(s) \\ \frac{dy^*}{ds}(s) \\ \frac{dz^*}{ds}(s) \end{pmatrix}$

En utilisant les résultats sur les fonctions composées, on obtient :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx^*}{ds}(s) \frac{ds}{dt}(t),$$

et des relations similaires pour y et z . On a donc la relation :

$$\vec{T} = \frac{ds}{dt}(t) \vec{T}^*,$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

d'où :

$$\|\vec{T}\| = \left| \frac{ds}{dt}(t) \right| \|\vec{T}^*\|,$$

or :

$$\|\vec{T}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}(t)\right)^2} = \left| \frac{ds}{dt}(t) \right|.$$

On en déduit donc que

$$\|\vec{T}^*\| = 1.$$

On peut montrer plus précisément :

Proposition 6.1.1. *Soit C une courbe munie d'une abscisse curviligne s (donc d'une orientation), on note $x^*(s), y^*(s), z^*(s)$ les coordonnées des points de C en fonction de s , alors :*

$$\vec{T}^* = \begin{pmatrix} \frac{dx^*}{ds}(s) \\ \frac{dy^*}{ds}(s) \\ \frac{dz^*}{ds}(s) \end{pmatrix} \text{ est le vecteur tangent à } C \text{ en } M(s), \text{ unitaire et dirigé dans le sens de } C.$$

**Vecteur tangent
unitaire**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.2 Circulation d'un champ de vecteurs

6.2.1	Travail d'un champ de forces	17
6.2.2	Circulation d'un champ de vecteurs	20
6.2.3	Champ de vecteurs dérivant d'un potentiel	22

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.2.1 Travail d'un champ de forces

Soit \vec{F} une force constante et \overrightarrow{AB} un déplacement rectiligne. Alors le travail fourni par la force \vec{F} pour aller de A à B est égal à $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

On suppose maintenant que la force n'est plus constante et que le déplacement n'est plus rectiligne.

\vec{F} est un champ de vecteurs : $\vec{F}(M) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$.

Le déplacement de A à B se fait le long de la courbe C , on suppose que s est une abscisse curviligne sur C .

Comme pour le calcul de masse on va discrétiser le segment curviligne \widehat{AB} , soit N un entier, on pose

$$\Delta s = \frac{s_B - s_A}{N}, \quad s_i = s_A + i\Delta s, \quad \Delta s \text{ a un signe quelconque.}$$

Δs est positif si la courbe est orientée de A vers B , Δs est négatif sinon.

On note M_i le point d'abscisse curviligne s_i , on a bien sûr $M_0 = A$, $M_N = B$.

On note \mathcal{T}_i le travail du champ de forces pour aller de M_i à M_{i+1}

On peut écrire $\mathcal{T}_{\widehat{AB}}(\vec{F}) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{T}_i$.

Si Δs est faible on peut supposer que le champ de force varie peu sur le segment curviligne $M_i M_{i+1}$, d'autre part on peut approcher le déplacement curviligne de M_i à M_{i+1} par le déplacement rectiligne : $\Delta s \overrightarrow{T_i^*}$ où $\overrightarrow{T_i^*}$ est le vecteur tangent unitaire en M_i (dirigé dans le sens des s croissants). En effet

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- Le déplacement rectiligne $\Delta s \vec{T}_i^*$ a même longueur $|\Delta s|$ que le déplacement curviligne $M_i M_{i+1}$ car le vecteur \vec{T}_i^* est unitaire.
- La direction de $\Delta s \vec{T}_i^*$ est tangente à la courbe C en M_i .
- Le sens de $\Delta s \vec{T}_i^*$ est le même que celui de $M_i M_{i+1}$, on peut le voir sur la figure VI.2.4, en effet le sens de \vec{T}_i^* change avec l'orientation de la courbe mais le signe de Δs change également.

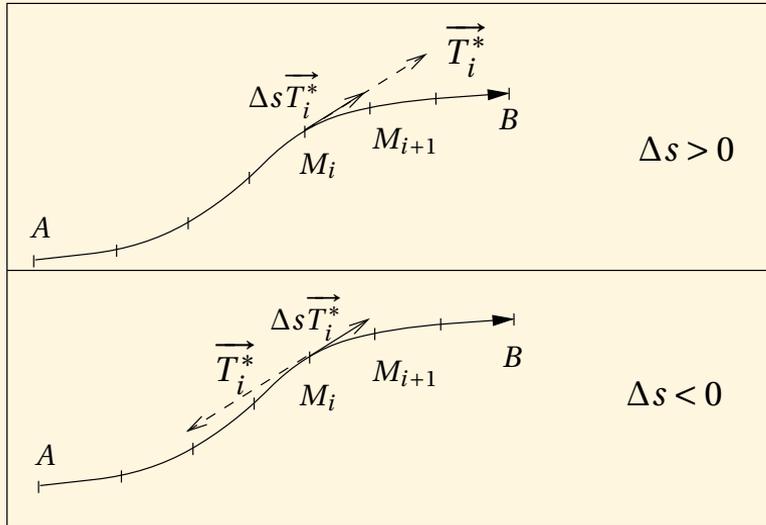


FIGURE 6.2.4 – approximation du déplacement curviligne

Travail d'un champ de forces

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si l'on note \vec{F}_i le champ de forces en M_i , on a :

$$\mathcal{T}_i \approx (\vec{F}_i) \cdot (\Delta s \vec{T}_i^*) = \Delta s \vec{F}_i \cdot \vec{T}_i^* = \Delta s g(s_i),$$

si on a défini :

$$\begin{aligned} g(s) &= \vec{F} \cdot \vec{T}^* \\ &= P(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dx^*}{ds}(s) + Q(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dy^*}{ds}(s) \\ &\quad + R(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dz^*}{ds}(s) \end{aligned}$$

Pour être plus précis, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\widehat{AB}}(\vec{F}) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} g(s_i) \Delta s \\ &= \int_{s_A}^{s_B} g(s) ds \quad (\text{en utilisant la définition de l'intégrale de Riemann}) \\ &= \int_{s_A}^{s_B} \left(P(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dx^*}{ds}(s) + Q(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dy^*}{ds}(s) \right. \\ &\quad \left. + R(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dz^*}{ds}(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Bien sûr le travail pour aller de A à B est l'opposé du travail pour aller de B à A .

Travail d'un champ de forces

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.2.2 Circulation d'un champ de vecteurs

Exercices :

[Exercice A.1.8](#)

[Exercice A.1.9](#)

On définit la circulation d'un champ de vecteurs \vec{V} le long d'un segment curviligne \widehat{AB}

Définition 6.2.1. Si C est une courbe d'extrémités A et B , si s est une abscisse curviligne, si $x^*(s), y^*(s), z^*(s)$ sont les coordonnées des points de C en fonction de s et si P, Q, R sont les composantes du champ de vecteurs \vec{V} , alors par définition la circulation $\mathcal{F}_{\widehat{AB}}(\vec{V})$ du champ de vecteurs \vec{V} le long du segment curviligne \widehat{AB} est égale à :

$$\int_{s_A}^{s_B} \left(P(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dx^*}{ds}(s) + Q(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dy^*}{ds}(s) + R(x^*(s), y^*(s), z^*(s)) \frac{dz^*}{ds}(s) \right) ds$$

On peut démontrer que la circulation définie précédemment ne dépend pas du choix de l'abscisse curviligne .

Par contre $\mathcal{F}_{\widehat{AB}}(\vec{V}) = -\mathcal{F}_{\widehat{BA}}(\vec{V})$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Souvent dans la pratique on ne connaît pas s mais seulement une paramétrisation de C , $(x(t), y(t), z(t))$, montrer en exercice que l'on peut calculer la circulation à l'aide de l'expression, (qui utilise t), suivante :

Proposition 6.2.1. *Si C est une courbe d'extrémités A et B , paramétrée par*

$(x(t), y(t), z(t))$, si P, Q, R sont les composantes du champ de vecteurs \vec{V} , alors la circulation du champ de vecteurs \vec{V} le long du segment curviligne \widehat{AB} est égale à :

$$\int_{t_A}^{t_B} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.$$

On peut garder pour la circulation la notation que l'on avait introduit pour le travail dans le paragraphe précédent, d'autres notations sont couramment utilisées.

Notations

$$\mathcal{F}_{\widehat{AB}}(\vec{V}) = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AB}} \vec{V} \cdot \vec{d\ell}$$

Toutes ces expressions représentent la circulation du champ de vecteurs \vec{V} le long du segment curviligne AB et se calculent par l'intégrale simple donnée dans la proposition VI.2.1.

Circulation d'un champ de vecteurs

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.2.3 Champ de vecteurs dérivant d'un potentiel

Exercices :[Exercice A.1.10](#)[Exercice A.1.11](#)

On suppose que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, on a donc $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial f}{\partial z}$.

La circulation du champ de vecteurs vaut donc :

$$\int_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right) dt.$$

Si l'on note $\hat{f}(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t). \end{aligned}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

$$\mathcal{T}_{\widehat{AB}}(\vec{V}) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\hat{f}}{dt}(t) dt = \hat{f}(t_B) - \hat{f}(t_A) = f(B) - f(A).$$

Donc on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 6.2.1. *Si le champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel f alors la circulation de ce champ de vecteurs le long du segment curviligne \widehat{AB} est égale à $f(B) - f(A)$.*

Une conséquence immédiate est :

Proposition 6.2.2.

1. *Si le champ de vecteurs \vec{V} dérive d'un potentiel, la circulation de ce champ de vecteurs le long du segment curviligne \widehat{AB} ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B .*
2. *La circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel, le long d'une courbe fermée est nulle.*

**Champ de
vecteurs
dérivant d'un
potentiel**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.3 Théorème de Green-Riemann

6.3.1	Théorème de Green-Riemann	25
6.3.2	Calcul d'aires	29

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.3.1 Théorème de Green-Riemann

Exercices :[Exercice A.1.12](#)[Exercice A.1.13](#)[Exercice A.1.14](#)

Théorème 6.3.1. Soit D une partie de \mathbb{R}^2 limitée par une courbe **fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct**, notée Γ . Soient deux fonctions P et Q qui admettent des dérivées partielles premières continues sur D , alors on a :

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int \int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy \quad (6.3.1)$$

Démonstration.–

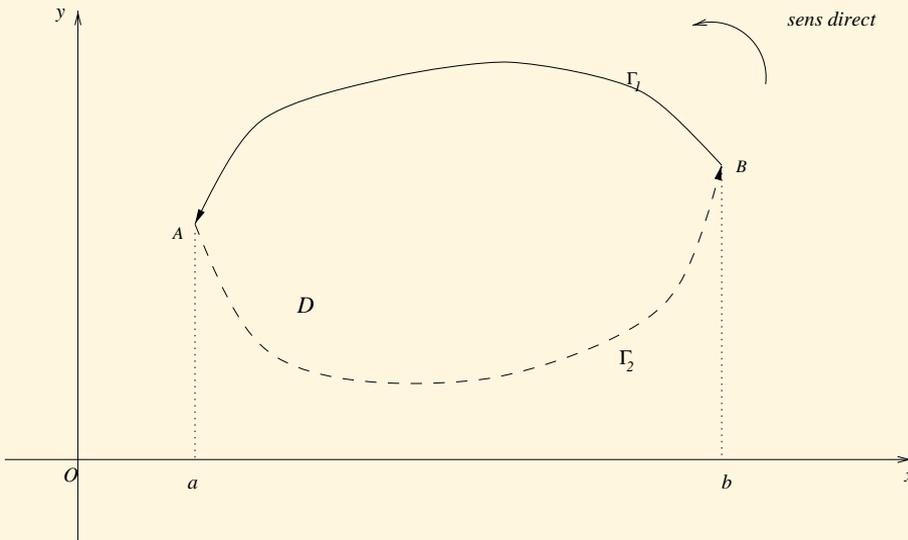
Sous les hypothèses précédentes, on peut écrire que :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)\}$$

On note $A(a, \phi_1(a))$ et $B(b, \phi_1(b))$. On a $\phi_1(a) = \phi_2(a)$, $\phi_1(b) = \phi_2(b)$. Voir figure.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

FIGURE 6.3.5 – allure de D

Les points de la “frontière” Γ de D vérifient l’une ou l’autre des équations $y = \phi_1(x)$ ou $y = \phi_2(x)$ et la courbe Γ peut donc être paramétrée en deux “morceaux” qui se rejoignent en A et B :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \phi_1(t) \end{cases} \quad t : b \rightarrow a$$

et

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \phi_2(t) \end{cases} \quad t : a \rightarrow b$$

Théorème de Green-Riemann

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Le parcours de Γ dans le sens direct correspond alors bien au parcours de Γ_1 puis de Γ_2 avec les paramétrages indiqués ci-dessus.

Calculons, par la formule de Fubini :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_a^b (P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x))) dx \\ &= \int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx \end{aligned}$$

Calculons $\int_{\Gamma} P(x, y) dx$, on écrit cette circulation comme la somme de la circulation sur Γ_1 et sur Γ_2 , on utilise la paramétrisation de ces 2 courbes pour calculer ces circulations.

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y) dx &= \int_{\Gamma_1} P(x, y) dx + \int_{\Gamma_2} P(x, y) dx \\ &= \int_b^a P(t, \phi_1(t)) dt + \int_a^b P(t, \phi_2(t)) dt \\ &= \int_a^b P(t, \phi_2(t)) dt - \int_a^b P(t, \phi_1(t)) dt \end{aligned}$$

On en déduit donc :

Théorème de Green-Riemann

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

$$\int \int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx \quad (6.3.2)$$

De manière analogue, en écrivant la définition de D sous la forme :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

on montrerait que :

$$\int \int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = + \int_{\Gamma} Q(x, y) dy \quad (6.3.3)$$

Des relations VI.3.2 et VI.3.3 on tire la conclusion.

Attention aux hypothèses du théorème, sur les fonctions P et Q . Traitez l'exercice [A.1.13](#) pour vous en convaincre.

Traiter l'exercice [A.1.14](#) pour se rassurer.

Théorème de Green-Riemann

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

6.3.2 Calcul d'aires

Exercices :

[Exercice A.1.15](#)[Exercice A.1.16](#)[Exercice A.1.17](#)[Exercice A.1.18](#)

Le théorème de Green-Riemann, peut servir au calcul d'aires. On a vu dans le chapitre sur les intégrales doubles que le calcul de l'aire d'un domaine plan D se ramène au calcul de l'intégrale double : $\iint_D dx dy$. Si on suppose connues les équations explicites du bord de D sous la forme par exemple : $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$, on obtient alors

$$\text{aire } D = \int_a^b (\phi_2(x) - \phi_1(x)) dx.$$

Quand le bord Γ de D est connu non pas par ses équations explicites, y en fonction de x ou x en fonction de y , mais par des équations paramétriques, on ne sait pas calculer l'intégrale double ! Le théorème de Green-Riemann est alors utile puisqu'il permet de ramener une intégrale double sur D en une intégrale curviligne le long de Γ , ce qui se calcule facilement quand on connaît une paramétrisation de Γ .

[Sommaire](#)
[Concepts](#)[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Proposition 6.3.1. *Soit D une partie de \mathbb{R}^2 limitée par une courbe fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, notée Γ , alors on a :*

$$\text{aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx. \quad (6.3.4)$$

On a vu qu'un cas particulier de courbes paramétrées dans le plan sont les courbes en polaires. On peut encore utiliser le résultat précédent et on obtient :

Proposition 6.3.2. *Soit D une partie de \mathbb{R}^2 limitée par une courbe fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, notée Γ dont l'équation polaire est : $\rho(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, alors on a :*

$$\text{aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta. \quad (6.3.5)$$

Démontrer les propositions précédentes en exercice.

Calcul d'aires

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.4 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

6.4.1	Forme différentielle	32
6.4.2	Formes différentielles-notations	34
6.4.3	Différentielle exacte	36
6.4.4	Intégrale curviligne d'une forme différentielle	37

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.4.1 Forme différentielle

Exercices :

[Exercice A.1.19](#)

Définition 6.4.1. Une application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est dite linéaire si :

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2), f(\lambda u_1) = \lambda f(u_1)$$

La plupart des applications que vous connaissez $\cos u$, e^u , u^2 ... ne sont pas linéaires. On peut démontrer que les seules applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont définies par : $f(u) = \alpha u$ où α est une constante réelle.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Définition 6.4.2. On appelle forme différentielle sur \mathbb{R} une application de \mathbb{R} dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Donc si w est une forme différentielle sur \mathbb{R} , $w(x)$ est une application linéaire, donc en particulier on peut écrire $w(x)(u) = \alpha(x)u$, en effet l'application linéaire varie avec x donc le coefficient α dépend de x .

Un exemple de forme différentielle sur \mathbb{R} est le suivant : Si f est une fonction réelle dérivable, on peut définir $w(x)(u) = f'(x)u$, la forme différentielle ainsi définie est appelée la différentielle de f , on note $w = df$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Ce que l'on vient de définir dans \mathbb{R} peut-être généralisé dans \mathbb{R}^n . Détaillons encore ce qui se passe dans \mathbb{R}^2

Définition 6.4.3. Une application f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est dite linéaire si :

$$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f((u_1, v_1) + (u_2, v_2)) = f(u_1, v_1) + f(u_2, v_2), f(\lambda(u_1, v_1)) = \lambda f(u_1, v_1)$$

On peut démontrer que les seules applications linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} sont définie par :
 $f(u, v) = \alpha u + \beta v$ où α et β sont des constantes réelles.

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Définition 6.4.4. On appelle forme différentielle sur \mathbb{R}^2 une application de \mathbb{R}^2 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Donc si w est une forme différentielle sur \mathbb{R}^2 , $w(x, y)$ est une application linéaire sur \mathbb{R}^2 , donc en particulier on peut écrire

$$w(x, y)(u, v) = \alpha(x, y)u + \beta(x, y)v.$$

Un exemple de forme différentielle sur \mathbb{R}^2 est le suivant : Si f est une fonction de 2 variables différentiable , on peut définir

$w(x, y)(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)v$, la forme différentielle ainsi définie est appelée la différentielle de f (voir chapitre1), on note $w = df$.

Forme différentielle

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.4.2 Formes différentielles-notations

Si l'on définit $f_1(x, y) = x$, alors $df_1(x, y)(u, v) = u$.

On note $df_1(x, y) = dx$. On a donc $dx(u, v) = u$.

De façon similaire on définit $f_2(x, y) = y$, alors $df_2(x, y)(u, v) = v$.

On note $df_2(x, y) = dy$. On a donc $dy(u, v) = v$.

On obtient donc pour une forme différentielle sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned}w(x, y)(u, v) &= \alpha(x, y)u + \beta(x, y)v \\ &= \alpha(x, y)dx(u, v) + \beta(x, y)dy(u, v) \\ &= (\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy)(u, v)\end{aligned}$$

Puisque l'égalité précédente est valable pour tout couple (u, v) , on peut écrire que les 2 applications linéaires $w(x, y)$ et $(\alpha(x, y)dx + \beta(x, y)dy)$ sont égales, d'où la notation :

$$w = \alpha dx + \beta dy.$$

Dans le cas de la différentielle d'une fonction, on retrouve la notation bien connue :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Tout ce que l'on vient de définir sur \mathbb{R}^2 se généraliserait à \mathbb{R}^n et plus particulièrement à \mathbb{R}^3 . L'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Définition 6.4.5. On appelle *forme différentielle* w sur \mathbb{R}^3 une application w de \mathbb{R}^3 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On note $w = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$, où α, β, γ sont 3 fonctions de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} qui admettent des dérivées partielles continues.

La définition précédente signifie que $w(x, y, z)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} qui s'écrit :

$$w(x, y, z)(u, v, w) = \alpha(x, y, z)u + \beta(x, y, z)v + \gamma(x, y, z)w$$

Formes différentielles- notations

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.4.3 Différentielle exacte

Exercices :

[Exercice A.1.20](#)

Le problème que l'on va se poser est un problème général concernant les formes différentielles sur \mathbb{R}^n , on va l'énoncer dans le cas particulier de \mathbb{R}^3 .

Un cas particulier de forme différentielle sur \mathbb{R}^3 est la différentielle d'une fonction f de \mathbb{R}^3 différentiable. Elle s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Réciproquement si $w = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ est une forme différentielle, existe-t-il une fonction f telle que $w = df$? Ce problème est similaire à celui que l'on a traité pour savoir si un champ de vecteurs dérivait d'un potentiel, et, comme dans ce cas, la réponse n'est pas toujours affirmative.

Proposition 6.4.1. *Si α, β, γ sont des fonctions dont les dérivées partielles sont continues, si on a*

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

alors il existe f telle que $w = df$, on dit que w est une différentielle exacte.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

6.4.4 Intégrale curviligne d'une forme différentielle

Définition 6.4.6. Soit C une courbe orientée, d'extrémités A et B , paramétrée par $(x(t), y(t), z(t), t : t_A \rightarrow t_B)$, soit $w = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ une forme différentielle sur \mathbb{R}^3 , on appelle intégrale curviligne de la forme différentielle w le long de C et on note

$$\int_C w = \int_C \alpha dx + \beta dy + \gamma dz,$$

l'expression calculée par l'intégrale simple suivante :

$$\int_{t_A}^{t_B} (\alpha(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \beta(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \gamma(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$
$$\int_{t_A}^{t_B} (\alpha(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \beta(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \gamma(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt$$

On remarque que l'intégrale curviligne le long de C de la forme différentielle est égale à la circulation le long de C du champ de vecteurs de composantes (α, β, γ) . Si la différentielle est exacte alors le champ de vecteurs dérive d'un potentiel. On obtient des résultats analogues :

Proposition 6.4.2. Soit C une courbe orientée, d'extrémités A et B . Si w est une différentielle exacte et s'écrit $w = df$, alors

$$\int_C w = f(B) - f(A)$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Proposition 6.4.3. *Soit C une courbe fermée. Si w est une différentielle exacte alors*

$$\int_C w = 0$$

**Intégrale
curviligne d'une
forme
différentielle**

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Annexe A

Exercices

A.1	Exercices de cours	40
A.2	Exercices de TD	63

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

A.1 Exercices de cours

A.1.1	Ch6-Exercice1	41
A.1.2	Ch6-Exercice2	42
A.1.3	Ch6-Exercice3	43
A.1.4	Ch6-Exercice4	44
A.1.5	Ch6-Exercice5	45
A.1.6	Ch6-Exercice6	46
A.1.7	Ch6-Exercice7	48
A.1.8	Ch6-Exercice8	49
A.1.9	Ch6-Exercice9	50
A.1.10	Ch6-Exercice10	51
A.1.11	Ch6-Exercice11	52
A.1.12	Ch6-Exercice12	53
A.1.13	Ch6-Exercice13	54
A.1.14	Ch6-Exercice14	55
A.1.15	Ch6-Exercice15	57
A.1.16	Ch6-Exercice16	58
A.1.17	Ch6-Exercice17	59
A.1.18	Ch6-Exercice18	60
A.1.19	Ch6-Exercice19	61
A.1.20	Ch6-Exercice20	62

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.1 Ch6-Exercice1

C est la chaînette d'équation $y = chx$, on oriente la courbe dans le sens des x croissants, on choisit pour origine sur la courbe le point $\Omega = (0, 1)$. Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne en fonction de x .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.2 Ch6-Exercice2

On reprend les notations du paragraphe "[Abscisse curviligne-démonstration](#)", ℓ_h est la longueur du segment curviligne $M(t), M(t+h)$, d_h est la distance entre $M(t)$ et $M(t+h)$, montrer que l'expression du rapport $\frac{\ell_h}{d_h}$ qui a été établie dans le cas h positif est encore valable lorsque h est négatif.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.3 Ch6-Exercice3

Calculer la longueur de l'arc de chaînette d'équation $y = chx$ qui est limité par les points d'abscisse x_1 et x_2 .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.4 Ch6-Exercice4

La cycloïde est la courbe parcourue par un point M fixé sur un cercle de rayon R qui roule sans glisser le long d'un axe. On suppose que l'axe est Ox , que le point M au départ est à l'origine.

1. Montrer que quand le cercle a roulé d'un angle t , l'abscisse et l'ordonnée de M sont $x(t) = R(t - \sin t)$, $y(t) = R(1 - \cos t)$.
2. Tracer la courbe décrite par le point M lorsque t varie de 0 à 2π .
3. Calculer la longueur d'une arche de cycloïde.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.5 Ch6-Exercice5

Démontrer le théorème VI.1.3.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

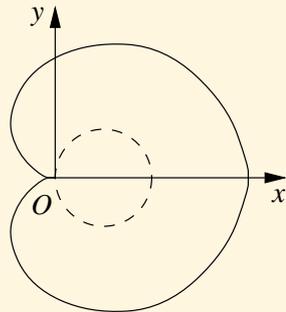
[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.6 Ch6-Exercice6

La cardioïde est la courbe parcourue par un point M fixé sur un cercle mobile de rayon R qui roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle fixe de rayon R . On suppose que le cercle fixe est centré en $(R, 0)$, que $M(0) = (4R, 0)$. On peut montrer que l'équation polaire de cette courbe est :

$$\rho(t) = 2R(1 + \cos t)$$

t est l'angle dont a roulé le cercle. Lorsque t a varié de 2π on a décrit toute la courbe, on est revenu au point de départ. La courbe a pour allure :



Calculer la longueur de la cardioïde.

La cardioïde fait partie de la famille des épicycloïdes, ici le cercle mobile a le même rayon que le cercle fixe, on peut construire toute une série de courbes avec un cercle mobile ayant un rayon 2 fois plus petit, 3 fois plus petit, etc. . . . La courbe obtenue quand le rayon est 2 fois plus petit est une néphroïde. Tracez rapidement la courbe et expliquez la terminologie !

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On peut construire également les hypocycloïdes, cette fois le cercle mobile roule sans glisser à l'intérieur du cercle fixe, là encore on obtient toute une famille de courbes selon le rapport des rayons des cercles, une des courbes les plus connues de la famille est l'astroïde, le rayon du cercle mobile est alors 4 fois plus petit que celui du cercle fixe.

[Solution](#)

Exercice A.1.6

Ch6-Exercice6

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.7 Ch6-Exercice7

Calculer la masse d'un fil en forme d'hélice.

Les équations paramétriques sont $(x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, z(t) = at, 0 \leq t \leq 2\pi)$.

La masse linéique est $\mu(t) = t$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.8 Ch6-Exercice8

Montrer que la définition VI.2.1 et la proposition VI.2.1 permettent de calculer la circulation sont équivalentes.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.9 Ch6-Exercice9

1. Soit le champ de vecteurs \vec{V} de composantes $(x+z, y^2, x)$, calculer la circulation de ce champ de vecteurs le long de l'arc \widehat{AB} d'hélice dont les équations paramétriques sont $x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, z(t) = at, A = (R, 0, 0), B = (R, 0, 2\pi a)$, (réponse : $2\pi aR$).
2. Soit le champ de vecteurs \vec{V} de composantes $(1, x + 3, \frac{1}{1+y})$, calculer la circulation de ce champ de vecteurs le long de l'arc \widehat{AB} dont les équations paramétriques sont $x(t) = t, y(t) = t^2, z(t) = t^3, A = (0, 0, 0), B = (1, 1, 1)$, (réponse : $\frac{23}{3} - \frac{3\pi}{4}$).

Solution[Sommaire](#)
[Concepts](#)[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.10 Ch6-Exercice10

1. Montrer que le champ de vecteurs \vec{V} de composantes $(y+z, x+z, x+y)$ dérive d'un potentiel.
2. Calculer ce potentiel.
3. En déduire la circulation de ce champ de vecteurs le long de l'arc AB d'hélice dont les équations paramétriques sont $x(t) = a \cos t, y(t) = b \sin t, z(t) = ct, A = (a, 0, 0), B = (0, b, c\frac{\pi}{2})$.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.11 Ch6-Exercice11

1. A quelle condition sur α le champ de vecteurs de composantes $(xy, z + \alpha x^2, y)$ dérive-t-il d'un potentiel?
2. Calculer alors de 2 façons différentes la circulation de ce champ de vecteurs le long du segment OA où A est le point de coordonnées $(1, 1, 1)$, (réponse : $\frac{3}{2}$).

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.12 Ch6-Exercice12

D est le disque de centre O et de rayon R limité par le cercle C .

On définit $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = 2x + y$.

Vérifier le théorème de Green-Riemann, à savoir :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy.$$

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.13 Ch6-Exercice13

On définit $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

On définit le cercle C de centre O et de rayon 1, on note D le disque de centre O et de rayon 1.

Calculer $\int_C Pdx + Qdy$.

Calculer $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Commentaires?

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.14 Ch6-Exercice14

1. On définit $P(x, y) = 2y$, $Q(x, y) = x$.

On définit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$,

on note C le bord de D orienté dans le sens trigonométrique direct.

(a) Faire une figure représentant D .

(b) Calculer $\int_C P dx + Q dy$.

(c) Calculer $\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$.

2. On définit $P(x, y) = -yx^2$, $Q(x, y) = xy^2$.

On définit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 2y < 0\}$,

on note C le bord de D orienté dans le sens trigonométrique direct.

(a) Faire une figure représentant D .

(b) Calculer $\int_C P dx + Q dy$.

(c) Calculer $\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$.

3. On définit $P(x, y) = ax + by$, $Q(x, y) = cx^2$ où a, b, c sont 3 constantes.

On définit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq x, 0 \leq y \leq -2x + 6\}$, on note C le bord de D orienté dans le sens trigonométrique direct.

(a) Faire une figure.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

(b) Calculer $\int_C P dx + Q dy$.

(c) Calculer $\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$.

Solution

Exercice A.1.14
Ch6-Exercice14

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.15 Ch6-Exercice15

Démontrer la proposition suivante :

Soit D une partie de \mathbb{R}^2 limitée par une courbe fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, notée Γ , alors on a :

$$\text{aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} xdy - ydx \quad (\text{A.1.1})$$

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.16 Ch6-Exercice16

On définit C l'ellipse d'équation $x(t) = a \cos t, y(t) = b \sin t$. On appelle D l'intérieur de C . Calculer l'aire de D en utilisant le théorème de Green-Riemann.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.17 Ch6-Exercice17

Démontrer la proposition suivante :

Soit D une partie de \mathbb{R}^2 limitée par une courbe fermée, sans point double, parcourue dans le sens direct, notée Γ dont l'équation polaire est : $\rho(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, alors on a :

$$\text{aire}(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta. \quad (\text{A.1.2})$$

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.18 Ch6-Exercice18

Dans chacun des cas suivants, faire une figure et calculer l'aire des domaines D dont le bord C a pour équation polaire :

1. $\rho(\theta) = R$. (Quelle est la courbe C ?)
2. $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$ (cardioïde), (réponse : $\frac{3\pi}{2}$)
3. $\rho(\theta) = \cos\theta$. (Quelle est la courbe C ? Le résultat obtenu est-il correct?)

Dans chacun des cas précédents vous devez déterminer θ_1 et θ_2 pour que toute la courbe soit parcourue une seule fois dans le sens direct.

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.19 Ch6-Exercice19

En vous inspirant de ce qui a été fait dans \mathbb{R}^2 , donner la définition d'une application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} .

Donner un exemple d'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.1.20 Ch6-Exercice20

On définit $w(x, y, z) = -ydx + xdy + zdz$ montrer qu'il n'existe pas de fonction f telle que $df = w$, c'est à dire telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x, \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = z$

On définit $w(x, y, z) = xdx + ydy + zdz$ montrer qu'il existe une fonction f telle que $df = w$, calculer f .

[Solution](#)

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

A.2 Exercices de TD

A.2.1	longueur de courbes planes $y = f(x)$	64
A.2.2	longueur de courbes planes paramétrées	65
A.2.3	longueur de courbes planes en polaire	66
A.2.4	intersection sphère-plan	67
A.2.5	circulation	68
A.2.6	circulation et potentiel	69
A.2.7	circulation	70
A.2.8	circulation, Green-Riemann	71
A.2.9	calcul d'aires limitées par des courbes	72
A.2.10	calcul d'aire, Green-Riemann	73
A.2.11	Green-Riemann, gare aux hypothèses	74

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.1 longueur de courbes planes $y = f(x)$

1.
 - (a) Calculer la longueur du morceau de la chaînette d'équation $y = \cosh x$, limité par les points A et B d'abscisse respectives x_A et x_B .
 - (b) On choisit comme origine le point $M_0(0, 1)$ et on oriente la courbe dans le sens des x croissants. Déterminer l'abscisse curviligne s et retrouver ainsi la longueur précédente.
 - (c) On suppose que la masse linéique est $\mu(s) = |s|$. Calculer la masse du morceau de chaînette précédent.
2. On considère la parabole \mathcal{P} d'équation $y = \frac{-x^2}{4}$. Les points $A(0, 0)$ et $B(2, -1)$ sont situés sur \mathcal{P} . On oriente \mathcal{P} de A vers B , on choisit A comme origine, et on note s l'abscisse curviligne définie par ces choix.
 - (a) Calculer l'abscisse curviligne d'un point $M(x, y) \in \mathcal{P}$. En déduire la longueur du segment de courbe AB .
 - (b) On suppose que \mathcal{P} a une masse linéique $\mu(s) = |s|$. Calculer la masse de l'arc de parabole compris entre les points A et B .

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 longueur de courbes planes paramétrées

Représenter graphiquement (allure) et calculer la longueur des courbes suivantes.

1. L'astroïde d'équation (donner l'intervalle de variation du paramètre u)

$$\begin{cases} x(u) = a \cos^3 u \\ y(u) = a \sin^3 u \end{cases}$$

2. L'arche de cycloïde d'équation (où le paramètre u vérifie $0 \leq u \leq 2\pi$)

$$\begin{cases} x(u) = a(u - \sin u) \\ y(u) = a(1 - \cos u) \end{cases}$$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.3 longueur de courbes planes en polaire

Représenter graphiquement (allure) et calculer la longueur des courbes suivantes.

1. La cardioïde d'équation (donner l'intervalle de variation du paramètre θ) $\rho(\theta) = a(1 + \cos\theta)$
2. La courbe d'équation (donner l'intervalle de variation du paramètre θ) $\rho(\theta) = \cos\theta$

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.4 intersection sphère-plan

On appelle \mathcal{C} la courbe définie par (où $R > 0$)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = 2(R - y) \end{cases}$$

Paramétrer \mathcal{C} et en déduire sa longueur. Faire un dessin et retrouver directement le résultat.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.5 circulation

1. On définit les points $A(1,0)$ et $B(0,1)$ et on considère les courbes suivantes.

(Γ_1) triangle OAB

(Γ_2) bord du quart de disque OAB

(Γ_3) cercle de centre A et de rayon 2

(Γ_4) arc de Γ_3 situé dans $x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

Calculer la circulation le long de ces courbes des champs de vecteurs suivants (préciser l'orientation choisie sur chacune des courbes).

(a) $\vec{V}(y, -x + 1)$

(b) $\vec{U}(y, x)$

2. Calculer la circulation du champ $\vec{W}(y^2, -x^2)$ le long du bord du domaine

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$$

orienté dans le sens trigonométrique.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.6 circulation et potentiel

On considère le champ de vecteur $\vec{V}(y^2, x^2)$.

1. \vec{V} dérive-t-il d'un potentiel ?
2. Déterminer les cercles du plan le long desquels la circulation de \vec{V} est nulle.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.7 circulation

Pour chacun des cas suivants, calculer la circulation du champ de vecteur \vec{V} le long de la courbe \mathcal{C} . Faire une figure sur laquelle on indiquera l'orientation choisie.

1. $\vec{V}(xy, 0, x)$ et \mathcal{C} est le triangle ABC où $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ et $C(0, 0, 6)$.

2. $\vec{V}(1, x, 1)$ et \mathcal{C} a pour équation

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 \end{cases}$$

3. $\vec{V}(-y, -z, -x)$ et \mathcal{C} est le bord de la surface

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = R^2, h_1 \leq z \leq h_2, y \geq 0\}$$

4. $\vec{V}(x^2y, y^2z, z^2x)$ et \mathcal{C} a pour équation

$$\begin{cases} z = 1 \\ y = 1 + x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

5. $\vec{V}(y+z, x+z, x+y)$ et \mathcal{C} est le segment de droite AB où $A(1, 2, 3)$ et $B(1, -1, 2)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 circulation, Green-Riemann

1. On considère le domaine de \mathbb{R}^2

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

On appelle \mathcal{C} le bord de \mathcal{D} orienté dans le sens trigonométrique. Calculer la circulation du champ de vecteur $\vec{V}(2y, x)$ le long de \mathcal{C} , directement, puis en utilisant le théorème de Green-Riemann (dont on rappellera les hypothèses, comme d'hab.).

2. On considère le cercle \mathcal{C} d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Calculer, directement, puis en utilisant le théorème de Green-Riemann, l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} xy^2 dy - yx^2 dx$.

Solution

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.9 calcul d'aires limitées par des courbes

Dans chacun des cas suivants, calculer l'aire du domaine limité par la courbe \mathcal{C} .

1. \mathcal{C} est l'astroïde d'équation (donner l'intervalle de variation du paramètre u)

$$\begin{cases} x(u) = a \cos^3 u \\ y(u) = a \sin^3 u \end{cases}$$

2. \mathcal{C} est constituée de l'arche de cycloïde d'équation (où le paramètre u vérifie $0 \leq u \leq 2\pi$)

$$\begin{cases} x(u) = a(u - \sin u) \\ y(u) = a(1 - \cos u) \end{cases}$$

et de l'axe Ox .

3. \mathcal{C} est la lemniscate de Bernouilli d'équation $\rho(\theta) = a\sqrt{\cos 2\theta}$.
4. \mathcal{C} est la cardioïde d'équation $\rho(\theta) = a(1 + \cos\theta)$.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.10 calcul d'aire, Green-Riemann

On considère le domaine de \mathbb{R}^2

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x \right\}$$

Calculer l'aire de \mathcal{D} , directement, puis en utilisant le théorème de Green-Riemann.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Exercice A.2.11 Green-Riemann, gare aux hypothèses

1. Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, où Γ désigne le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique.
2. On pose

$$\begin{cases} P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$. Conclure.

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le roman à un grain où le concept est mentionné.

A

Abscisse curviligne-définition	4
Abscisse curviligne-démonstration	6
Aire	29

C

Champ de vecteurs dérivant d'un potentiel .	22
Circulation	20

D

Différentielle exacte	36
-----------------------------	-----------

F

Forme différentielle-définition	32
Formes différentielles-notations	34

G

Green-Riemann	25
---------------------	-----------

I

Intégrale curviligne d'une forme différentielle	37
---	-----------

L

Longueur	9
----------------	----------

M

Masse	11
-------------	-----------

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)



T

Travail 17

V

Vecteur tangent unitaire 14

[Sommaire](#)
[Concepts](#)

[Exemples](#)
[Exercices](#)
[Documents](#)

Solution de l'exercice A.1.1

Une paramétrisation de C est

$$\begin{aligned}x &= t \\y &= cht.\end{aligned}$$

On a donc

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + sh^2u} du = \int_0^t chudu = sht.$$

On peut bien sûr remplacer t par x .

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.2

ℓ_h vaut $s(t) - s(t+h)$ et $\sqrt{h^2} = -h$.

Le numérateur et le dénominateur changent donc de signe, le quotient reste inchangé.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.3

$$\ell = \left| \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + sh^2(u)} du \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} ch u du \right| = |shx_2 - shx_1|.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.4

1. Le cercle roule sans glisser donc la longueur OH est égale à la longueur HM . On exprime les longueurs PM et NP en fonction du rayon R et de l'angle t . On écrit ensuite que $x = OH - PM$, $y = R - NP$. Voir figure

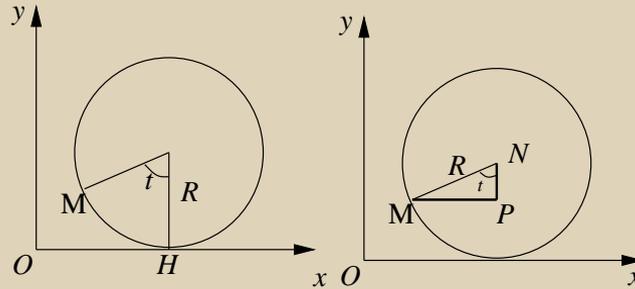


FIGURE A.2.1 – construction de la cycloïde

2. On trace le tableau de variation. On obtient la courbe suivante,

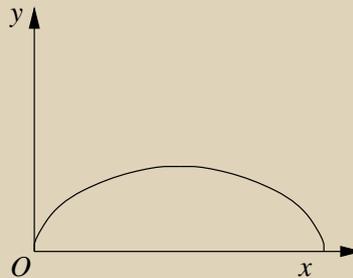


FIGURE A.2.2 – une arche de cycloïde

3.

$$\ell = R \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt$$

$$\ell = R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt$$

$$\ell = R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt$$

$$\ell = 2R \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt$$

$$\ell = 2R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4R \left[-\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8R.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.5

Une paramétrisation de la courbe est :

$$x(t) = \rho(t) \cos t$$

$$y(t) = \rho(t) \sin t$$

On a donc

$$x'(t) = \rho'(t) \cos t - \rho(t) \sin t$$

$$y'(t) = \rho'(t) \sin t + \rho(t) \cos t$$

D'où

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \rho^2(t) + \rho'^2(t)$$

Ce qui termine la démonstration.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.6

$$\begin{aligned}\ell &= 2R \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos t)^2 + \sin^2 t} dt \\ &= 2R \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos t} dt \\ &= 2R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos t} dt \\ &= 2R\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = 4R \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \\ &= 4R \left(\int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{t}{2} dt \right) = 8R + 8R = 16R.\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.7

$$m = \left| \int_0^{2\pi} t \sqrt{R^2 + a^2} dt \right| = 2\pi^2 \sqrt{R^2 + a^2}.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.8

On effectue alors un changement de variables dans l'expression de la définition VI.2.1 on a en effet :

$$ds = \frac{ds}{dt}(t)dt, \frac{dx}{dt}(t) = \frac{ds}{dt}(t) \frac{dx^*}{ds}(s(t))$$

et des relations similaires pour y et z .

On obtient immédiatement le résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.9

Revoir les calculs d'intégrales, puis appliquer la proposition VI.2.1.

1.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\widehat{AB}}(\vec{V}) &= \int_0^{2\pi} (R \cos t + at)(-R \sin t) + R^2 \sin^2 t(R \cos t) + aR \cos t dt \\ &= -aR \int_0^{2\pi} t \sin t dt \\ &= aR [t \cos t]_0^{2\pi} - aR \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2\pi aR.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\widehat{AB}}(\vec{V}) &= \int_0^1 1 + (t+3)2t + \frac{1}{1+t^2}3t^2 dt \\ &= 1 + \frac{2}{3} + 3 + 3 - 3 \arctan 1 = \frac{23}{3} - \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.10

1. Le rotationnel est nul, donc on calcule un potentiel.

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y + z \Rightarrow f(x, y, z) = yx + zx + f_1(y, z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z = x + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y, z) \Rightarrow f_1(y, z) = zy + f_2(z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x + y = x + y + f_2'(z) \Rightarrow f_2(z) = C,$$

d'où

$$f(x, y, z) = yx + zx + zy + C.$$

3.

$$\mathcal{I}_{\widehat{AB}}(\vec{V}) = f(B) - f(A) = bc \frac{\pi}{2}.$$

On peut calculer la circulation directement en utilisant la proposition VI.2.1, vérifier que l'on obtient le même résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.11

1. On calcule le rotationnel, il est nul à condition que

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

2. On calcule le potentiel, puis la différence de potentiel ;

ou

on paramètre le segment de droite et on calcule la circulation directement.

$$f(x, y, z) = \frac{yx^2}{2} + yz + C,$$

la circulation vaut $\frac{3}{2}$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.12

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1,$$

donc

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \text{aire } D = \pi R^2.$$

Une paramétrisation de C est, bien sûr,

$$x = R \cos t, y = R \sin t, t : 0 \rightarrow 2\pi.$$

On a donc :

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} ((R \cos t + R \sin t)(-R \sin t) + (2R \cos t + R \sin t)R \cos t) dt = \pi R^2.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.13

On calcule

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

On calcule

$$\int_C P dx + Q dy = 2\pi$$

Où est l'erreur?

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.14

1. (a) Voir la figure

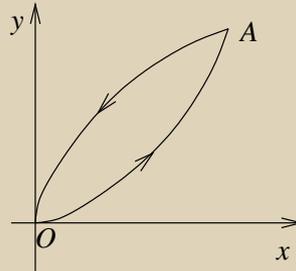


FIGURE A.2.3 – question 1

(b) Il faut paramétrer C , donc il faut paramétrer \widehat{OA} puis \widehat{AO} .

$$\text{Pour } \widehat{OA} : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t : 0 \rightarrow 1.$$

$$\text{Pour } \widehat{AO} : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \quad t : 1 \rightarrow 0.$$

$$\int_{\widehat{OA}} Pdx + Qdy = \int_0^1 4t^2 dt$$

$$\int_{\widehat{AO}} Pdx + Qdy = \int_1^0 5t^2 dt$$

Après calculs on obtient :

$$\int_C Pdx + Qdy = -\frac{1}{3}$$

(c)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -1,$$

d'où

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = - \iint_D dx dy = - \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = -\frac{1}{3}$$

D'où le résultat.

2. (a) D est le disque de centre $(0, 1)$ et de rayon 1.

(b) Il faut paramétrer le cercle C . $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases} \quad t : 0 \rightarrow 2\pi.$

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + 2 \sin t \cos^2 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t + \sin t \cos^2 t + \sin^2 t \cos^2 t dt$$

Après linéarisation et simplification on obtient :

$$\int_C P dx + Q dy = \frac{3\pi}{2}$$

(c) Exprimer l'intégrale double sur D à l'aide d'un changement de variables.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^2 + y^2,$$

On peut utiliser les coordonnées polaires r et θ centrées en O , cela simplifie la fonction à intégrer.

On peut également utiliser les coordonnées polaires ρ et t centrées en $(0, 1)$, cela simplifie le domaine d'intégration.

On obtient avec les coordonnées polaires centrées en O :

$$\iint_D x^2 + y^2 dx dy = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} r^2 r dr d\theta$$

On obtient avec les coordonnées polaires centrées en $(0, 1)$:

$$\iint_D x^2 + y^2 dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho + \rho^3 + 2\rho^2 \sin t dt d\rho$$

Bien sûr on obtient le même résultat dans les 2 cas : $\frac{3\pi}{2}$

3. (a) Voir la figure

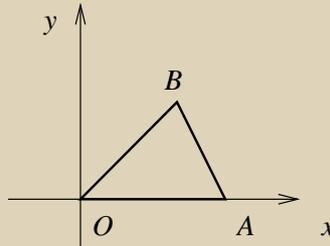


FIGURE A.2.4 – question 3

(b) Il faut paramétrer C , donc il faut paramétrer OA puis AB , puis BO .

$$\text{Pour } OA : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t : 0 \rightarrow 3.$$

$$\text{Pour } AB : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 6 \end{cases} \quad t : 3 \rightarrow 2.$$

$$\text{Pour } BO : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t : 2 \rightarrow 0.$$

$$\int_{OA} P dx + Q dy = \int_0^3 at dt,$$

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_3^2 at + b(-2t + 6) - 2ct^2 dt,$$

$$\int_{BO} Pdx + Qdy = \int_2^0 at + bt + ct^2 dt.$$

On en déduit que le résultat ne dépend pas de a .

$$\int_0^3 atdt + \int_3^2 atdt + \int_2^0 atdt = \int_0^0 atdt = 0$$

Après calculs on obtient :

$$\int_C Pdx + Qdy = -3b + 10c.$$

(c) Exprimer l'intégrale double sur D à l'aide d'intégrales simples.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2cx - b,$$

d'où

$$\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = -b \text{ aire } D + 2c \iint_D x dx dy$$

aire $D = 3$,

$$\iint_D x dx dy = \int_0^2 \int_y^{-\frac{y}{2}+3} x dx dy = 5$$

D'où le résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.15

On applique Green-Riemann avec $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$

On calcule $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$.

$$\iint_D 2 dx dy = 2 \text{ aire } D.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.16

$$\int_C xdy - ydx = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t + \sin^2 t dt = 2\pi ab.$$

L'aire vaut donc πab . On retrouve bien sûr l'aire du disque dans le cas $a = b$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.17

Une paramétrisation possible de la courbe est $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$, $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$.

On obtient $x(\theta)y'(\theta) - y(\theta)x'(\theta) = \rho^2(\theta)$, on utilise la proposition VI.2.1, on a donc

$$\int_{\Gamma} xdy - ydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) d\theta.$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.18

1. La courbe est un cercle.

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi, A = \pi R^2$$

2.

$$\theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi, A = \frac{3\pi}{2}$$

3. On étudie la courbe et on vérifie qu'il s'agit d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$, on calcule l'aire, on trouve bien $\frac{\pi}{4}$. On a $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.19

Une application f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} est dite linéaire si :

$$\forall (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$f((u_1, v_1, w_1) + (u_2, v_2, w_2)) = f(u_1, v_1, w_1) + f(u_2, v_2, w_2), f(\lambda(u_1, v_1, w_1)) = \lambda f(u_1, v_1, w_1)$$

L'application qui au triplet (u_1, v_1, w_1) associe le nombre $3u_1 + 7v_1 + 4w_1$ est linéaire.

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.1.20

Revoir les champs de vecteurs qui dérivent d'un potentiel, si on définit $\vec{V} = (-y, x, z)$, montrer que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \neq \vec{0}$.

Par contre si $\vec{V} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$, il existe donc f .

Après calculs

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + c$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

Solution de l'exercice A.2.8

1. • Calcul direct :

Il faut paramétrer \mathcal{C} . On paramètre séparément les deux arcs de \mathcal{C} .

Paramétrage de \mathcal{C}_1 :

$$\begin{aligned}\varphi_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_1(t) \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \end{array} \right.\end{aligned}\tag{A.2.1}$$

Paramétrage de \mathcal{C}_2 :

$$\begin{aligned}\varphi_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_2(t) \left| \begin{array}{l} x = (1-t)^2 \\ y = 1-t \end{array} \right.\end{aligned}\tag{A.2.2}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{\mathcal{C}_1} 2ydx + xdy + \int_{\mathcal{C}_2} 2ydx + xdy \\ &= \int_0^1 2t^2 dt + t2t dt + \int_0^1 2(1-t)2(1-t)(-dt) + (1-t)^2(-dt) \\ &= \int_0^1 4t^2 dt + \int_0^1 -5(1-t)^2 dt \\ &= \left[\frac{4t^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{5(1-t)^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

• Calcul à l'aide de Green Riemann :

\mathcal{C} est sans boucle ni point double, orientée dans le sens direct. Les composantes $P(x, y) = 2y$ et $Q(x, y) = x$ de \vec{V} sont de classe \mathcal{C}^1 , donc le théorème de Green Riemann donne :

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{\mathcal{D}} dx dy$$

et on calcule l'intégrale double par Fubini :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On retrouve bien $\phi = -\frac{1}{3}$.

2. Il faut encore paramétrer \mathcal{C} .

$$x^2 + y^2 - 2y = x^2 + (y-1)^2 - 1$$

\mathcal{C} est donc le cercle de centre (0,1) et de rayon 1. On peut le paramétrer par :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto \varphi(\theta) \left| \begin{array}{l} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{array} \right. \end{aligned} \tag{A.2.3}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_{\mathcal{C}} xy^2 dy - yx^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos\theta(1+\sin\theta)^2 \cos\theta d\theta - (1+\sin\theta)\cos^2\theta(-\sin\theta)d\theta}_{\cos^2\theta(1+\sin\theta)(1+2\sin\theta)d\theta} \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta)d\theta
\end{aligned}$$

On linéarise les termes qui ne s'intègrent pas directement :

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2}{4} = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\
\cos^2\theta \sin^2\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{4i}\right)^2 \\
&= \frac{e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} - 2}{-16} \\
&= \frac{1 - \cos 4\theta}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\cos 4\theta}{4} + 3\cos^2\theta\sin\theta\right)d\theta \\
&= \left[\frac{3}{4}\theta\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{\sin 4\theta}{16}\theta\right]_0^{2\pi} + [-\cos^3\theta]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Les composantes $P(x, y) = -yx^2$ et $Q(x, y) = xy^2$ sont de classe \mathcal{C}^1 . La courbe \mathcal{C} est sans point double, orientée dans le sens trigonométrique. Le théorème de Green Riemann s'applique et donne :

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} (y^2 + x^2) dx dy\end{aligned}$$

Changement de variables :

$$\begin{aligned}\varphi : \Delta &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (r, \theta) &\longmapsto \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}\end{aligned}\tag{A.2.4}$$

de jacobien $\det J_{\varphi} = r$, où $\Delta = \{(r, \theta), 0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq r \leq 2 \sin \theta\}$.

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_{\Delta} r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2 \sin \theta} r^3 dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2 \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} 4 \sin^4 \theta d\theta\end{aligned}$$

Linéarisons :

$$\sin^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{e^{i4\theta} - 4e^{i2\theta} + 6 - 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}}{16} = \frac{\cos 4\theta}{8} - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^\pi \left(\frac{\cos 4\theta}{2} - 2\cos 2\theta + \frac{3}{2} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{\sin 4\theta}{8} - \sin 2\theta + \frac{3}{2}\theta \right]_0^\pi \\ &= \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)