MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

Chapitre 7 : Intégrale de surface

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT

▽

Chapitre 7
Intégrale de surface

7.1 Aire d'une surface

7.1.1 Aire d'une surface paramétrée

Exercices :
Exercice A.1.1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Si une surface S est plane, on peut supposer par exemple que S est dans le plan xOy, on a alors défini l'aire dans le chapitre sur l'intégrale double par :

$$\text{aire de } S = \iint_S dx\,dy$$

Supposons maintenant que la surface S est gauche (c'est-à-dire non plane), le théorème suivant permet de calculer son aire.

Théorème 7.1.1. *S est une surface paramétrée par :*
$\begin{cases} x = a(u,v) \\ y = b(u,v) \\ z = c(u,v) \end{cases}$, $(u,v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2$ *où a, b, c sont des fonctions différentiables. On note*

$$\sigma(u,v) = \left\| \overrightarrow{T_u}(u,v) \wedge \overrightarrow{T_v}(u,v) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial c}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\|$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

alors :

$$aire\,(S) = \iint_{\Delta} \sigma\,(u,v)\,du\,dv$$

Vous pouvez lire la démonstration de ce théorème dans le paragraphe suivant.

7.1.2 Aire d'une surface-démonstration

Exercices :
Exercice A.1.2

On va maintenant démontrer le résultat énoncé dans le paragraphe précédent, on reprend les notations de ce paragraphe. On peut quadriller le domaine Δ, voir la figure VII.2.1, alors Δ est approché par l'union des rectangles Δ_{ij}. Δ_{ij} est le rectangle défini par :

$$u_i \leq u \leq u_i + h_1, v_j \leq v \leq v_j + h_2.$$

A chaque rectangle Δ_{ij} correspond un élément ε_{ij} sur la surface S. Les sommets de ε_{ij} sont :

$$P_0 = \left\{ \begin{array}{l} a(u_i, v_j) \\ b(u_i, v_j) \\ c(u_i, v_j) \end{array} \right. , P_1 = \left\{ \begin{array}{l} a(u_i + h_1, v_j) \\ b(u_i + h_1, v_j) \\ c(u_i + h_1, v_j) \end{array} \right. ,$$

$$P_2 = \left\{ \begin{array}{l} a(u_i, v_j + h_2) \\ b(u_i, v_j + h_2) \\ c(u_i, v_j + h_2) \end{array} \right. , P_3 = \left\{ \begin{array}{l} a(u_i + h_1, v_j + h_2) \\ b(u_i + h_1, v_j + h_2) \\ c(u_i + h_1, v_j + h_2) \end{array} \right. .$$

Voir figure VII.1.2.

L'aire de S peut être approchée par la somme des aires des surfaces ε_{ij}. L'approximation est d'autant meilleure que les pas h_1 et h_2 sont petits.

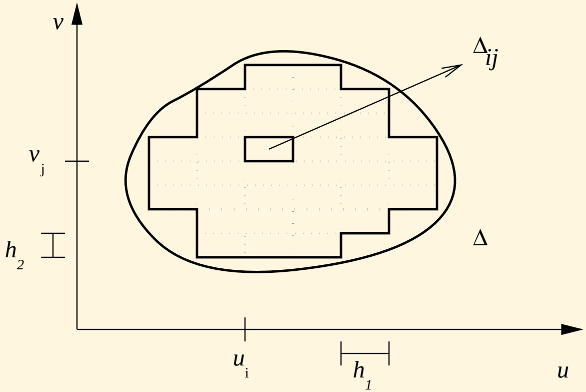


FIGURE 7.1.1: quadrillage du domaine Δ

On va maintenant construire une approximation de l'aire de ε_{ij}. Pour cela on approche les points P_1 et P_2 par respectivement M_1 et M_2, puis on approche l'aire de ε_{ij} par l'aire du parallélogramme dont 3 des sommets sont P_0, M_1 et M_2. Voir figure VII.1.3.

Pour construire les points M_1 et M_2, on utilise la formule de Taylor, on sait en effet que $a(u_i+h_1,v_j) \approx a(u_i,v_j)+h_1\dfrac{\partial a}{\partial u}\left(u_i,v_j\right)$,on a des relations similaires avec b et c donc le point P_1 est approché par le point M_1 de composantes :

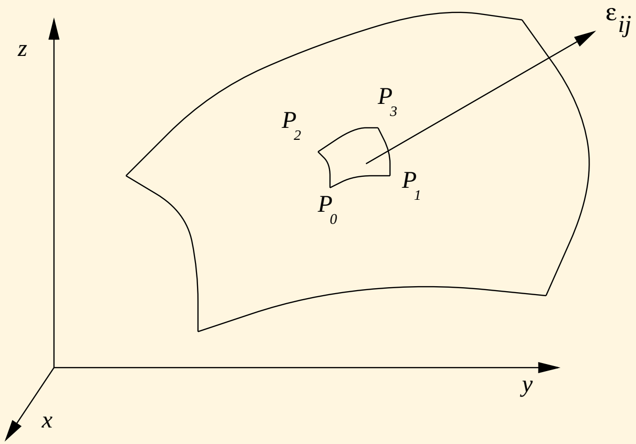


FIGURE 7.1.2: un élément ε_{ij}

$$M_1 = \begin{pmatrix} a(u_i, v_j) + h_1 \dfrac{\partial a}{\partial u}(u_i, v_j) \\ b(u_i, v_j) + h_1 \dfrac{\partial b}{\partial u}(u_i, v_j) \\ c(u_i, v_j) + h_1 \dfrac{\partial c}{\partial u}(u_i, v_j) \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

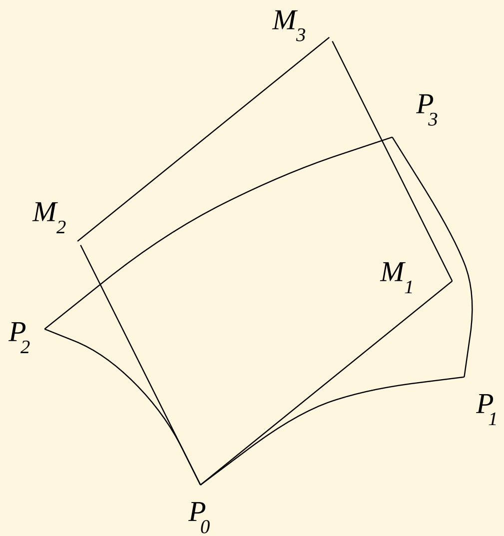


FIGURE 7.1.3: approximation de ε_{ij}

Géométriquement le vecteur

$$\overrightarrow{P_0M_1} = h_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial b}{\partial u}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial c}{\partial u}(u_i, v_j) \end{pmatrix}$$

est tangent à l'arc P_0P_1 en P_0 comme indiqué sur la figure VII.1.3. Montrer ce résultat en exercice.

De même P_2 est approché par :

$$M_2 = \begin{pmatrix} a(u_i, v_j) + h_2 \dfrac{\partial a}{\partial v}(u_i, v_j) \\ b(u_i, v_j) + h_2 \dfrac{\partial b}{\partial v}(u_i, v_j) \\ c(u_i, v_j) + h_2 \dfrac{\partial c}{\partial v}(u_i, v_j) \end{pmatrix}.$$

On note

$$\overrightarrow{T_u}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix}, \overrightarrow{T_v}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

L'aire de $\varepsilon_{i,j}$ est approchée par l'aire du parallélogramme dont 3 des sommets sont P_0, M_1 et M_2 :

$$\left\| \overrightarrow{P_0M_1} \wedge \overrightarrow{P_0M_2} \right\| = h_1 h_2 \left\| \overrightarrow{T_u}(u_i, v_j) \wedge \overrightarrow{T_v}(u_i, v_j) \right\|.$$

Depuis le début de ce paragraphe on parle d'approximation sans vraiment expliciter le sens donné à ce terme, pour être plus précis et sans donner la démonstration, on peut énoncer le résultat suivant : l'aire de S est égale à :

$$\text{aire de } S = \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \sum_{i,j} h_1 h_2 \left\| \overrightarrow{T_u}(u_i, v_j) \wedge \overrightarrow{T_v}(u_i, v_j) \right\|$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

En utilisant la définition de l'intégrale double :

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \sum_{i,j} h_1 h_2 \left\| \overrightarrow{T_u}(u_i, v_j) \wedge \overrightarrow{T_v}(u_i, v_j) \right\| = \int \int_\Delta \left\| \overrightarrow{T_u}(u, v) \wedge \overrightarrow{T_v}(u, v) \right\| du dv.$$

7.1.3 Aire d'une surface définie par son équation explicite

Exercices :
Exercice A.1.3
Exercice A.1.4
Exercice A.1.5

Soit la surface S d'équation cartésienne explicite $(z = \varphi(x, y), (x, y) \in D)$.

Une paramétrisation de S est $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \varphi\left(x, y\right) \end{cases}$,

donc $\overrightarrow{T_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}, \overrightarrow{T_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}, \overrightarrow{T_x} \wedge \overrightarrow{T_y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors $\sigma(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2(x, y) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2(x, y)}$.

On peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 7.1.2. *S est une surface dont l'équation cartésienne explicite est $(z = \varphi\left(x, y\right), (x, y) \in D)$. On suppose que φ est différentiable.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On pose :

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \;\; q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \;\; \sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

alors :

$$aire(S) = \int\int_D \sigma(x, y)\,dx\,dy.$$

Le domaine d'intégration D est la projection de S sur le plan xOy.

On pourrait énoncer des théorèmes similaires au théorème VII.1.2, quand on exprime x en fonction de y et z ou y en fonction de x et z. Faites le en exercice.

7.1.4 Aire d'une surface définie par son équation explicite-variante

Exercices :
Exercice A.1.6
Exercice A.1.7
Exercice A.1.8
Exercice A.1.9

Etudions une variante pour calculer l'expression

$$\sigma(x,y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 (x,y) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 (x,y)}.$$

$z = \varphi(x,y) \Longleftrightarrow z - \varphi(x,y) = 0 \Longleftrightarrow f(x,y,z) = 0,$

$$\vec{N} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à la surface au point $M = (x, y, \varphi(x,y))$.
On remarque que $\|\vec{N}\| = \sigma(x,y)$. On obtient un vecteur normal unitaire :

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sigma(x,y)} \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Aire d'une surface définie par son équation explicite-variante

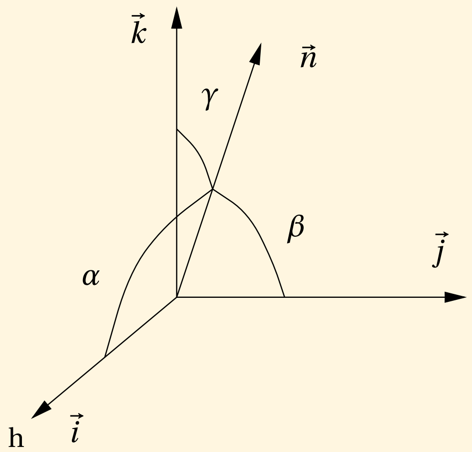


FIGURE 7.1.4: vecteur normal unitaire

Le vecteur normal unitaire $\vec{n}$ fait un angle aigu avec l'axe Oz, en effet sa troisième composante est positive. Donc si on connaît les composantes de $\vec{n}$, vecteur normal unitaire qui fait un angle aigu avec Oz, on note ces composantes $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$: α, β, γ représentent les angles respectifs de $\vec{n}$ avec $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$: voir figure VII.1.4. On peut alors obtenir directement σ par la relation $\sigma(x,y) = \dfrac{1}{cos\gamma}$ où évidemment γ dépend des coordonnées du point $M(x, y, \varphi(x,y))$

Théorème 7.1.3. *S est une surface dont l'équation cartésienne explicite est*
$(z = \varphi\left(x, y\right), (x, y) \in D)$.
On suppose que $\vec{n}$ est le vecteur normal unitaire à S qui fait un angle aigu avec Oz, on note $\cos\gamma$ *la*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

troisième composante de $\vec{n}$, alors :

$$aire(S) = \int\int_D \frac{1}{\cos\gamma} dxdy,$$

où évidemment γ dépend des coordonnées du point $M(x, y, \varphi(x, y))$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.2 Intégrale de surface

7.2.1 Intégrale de surface-définition

Définition 7.2.1. *Etant données une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et une surface S d'équations paramétriques $x = a(u,v)$, $y = b(u,v)$, $z = c(u,v)$, $(u,v) \in \Delta$, où a, b, c sont des fonctions différentiables. On note*

$$\sigma(u,v) = \left\| \overrightarrow{T_u}(u,v) \wedge \overrightarrow{T_v}(u,v) \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial b}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial c}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial b}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial c}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right\|.$$

On définit l'intégrale de surface de f sur S par :

$$\int\int_S f\, d\sigma = \int\int_\Delta f\left(a(u,v), b(u,v), c(u,v)\right) \sigma(u,v)\, du\, dv.$$

On peut montrer que l'expression ci-dessus ne dépend pas de la paramétrisation choisie pour S. On en déduit l'expression de l'intégrale de surface dans le cas où la surface est définie par une équation cartésienne explicite.

Théorème 7.2.1. *Etant données une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et une surface S dont l'équation cartésienne explicite est*
$z = \varphi\left(x,y\right), ((x,y) \in D)$, où φ est différentiable.
On pose :

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

alors :

$$\iint_S f\,d\sigma = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sigma(x,y)\,dx\,dy.$$

Propriétés

Les propriétés suivantes découlent de la définition et des propriétés des intégrales doubles.

– Si $S = S_1 + S_2$ alors $\iint_{S_1} f\,d\sigma + \iint_{S_2} f\,d\sigma = \iint_S f\,d\sigma$

– $\iint_S (f_1 + f_2)d\sigma = \iint_S f_1\,d\sigma + \iint_S f_2\,d\sigma$ et $\iint_S \alpha f\,d\sigma = \alpha \iint_S f\,d\sigma$ où α est un nombre réel.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.2.2 Intégrale de surface-application

Exercices :
Exercice A.1.10
Exercice A.1.11
Exercice A.1.12

On est amené à calculer une intégrale de surface dans les cas suivants :

– Si $f = 1$, $\iint_S f\,d\sigma$ est égale à l'aire de S.
– Si f représente la masse surfacique (masse par unité de surface), $\iint_S f\,d\sigma$ est la masse de la surface de S. Ceci est utilisé en particulier pour calculer la masse des plaques qui sont des volumes assimilés à des surfaces.
– Si μ est la masse surfacique, on obtient les coordonnées du centre de gravité de S par

$$m = \iint_S \mu d\sigma,\ x_G = \frac{1}{m}\iint_S x\mu d\sigma, y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\mu d\sigma, z_G = \frac{1}{m}\iint_S z\mu d\sigma$$

– Si μ est la masse surfacique, si Δ est un axe, on obtient le moment d'inertie de S par rapport à Δ en calculant :

$$\mathcal{M} = \iint_S \mu d^2(M,\Delta)d\sigma.$$

– Si la surface S est orientée par le choix d'un champ de normales unitaires $\vec{n}(x,y,z)$, si $\vec{V}(x,y,z)$ est un champ de vecteurs, si on définit

$$f(x,y,z) = \vec{n}(x,y,z)\cdot\vec{V}(x,y,z),$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

alors $\iint_S f\,d\sigma$ est le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers la surface orientée S. Nous allons revoir plus en détail ce cas particulier dans le prochain paragraphe.

7.3 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

7.3.1 Orientation d'une surface

Exercices :
Exercice A.1.13

Pour calculer la masse d'une surface, son centre de gravité, son moment d'inertie etc..., il est inutile d'orienter la surface. Par contre le calcul du flux d'un champ de vecteurs à travers une surface est lié au choix d'une orientation, lorsque l'orientation est modifiée, le flux change de signe. Il existe pour chaque surface 2 orientations possibles, si la surface est fermée, on parle d'orientation vers l'intérieur de la surface ou d'orientation vers l'extérieur de la surface, si la surface n'est pas fermée cette terminologie n'a plus de sens.
Le choix d'une orientation se fait par le choix d'un champ de vecteurs normaux unitaires . Par exemple si S est la sphère de centre O et de rayon R, si on choisit $\vec{n} = \begin{pmatrix} x/R \\ y/R \\ z/R \end{pmatrix}$, on oriente la surface (fermée) vers l'extérieur puisque les vecteurs normaux sont dirigés vers l'extérieur de S.
Si S est la demi-sphère de centre O, rayon R située dans le demi-espace $z \geq 0$, si on choisit $\vec{n} = \begin{pmatrix} x/R \\ y/R \\ z/R \end{pmatrix}$, il n'est plus question de parler d'intérieur et d'extérieur puisque la surface est ouverte, par contre on peut dire que la surface est orientée "vers le haut", puisque les vecteurs normaux "pointent vers le haut", pour être plus précis, les vecteurs normaux font un angle aigu avec Oz puisque leur troisième composante est positive.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si la surface est définie par l'équation $(z = \varphi(x,y),\ (x,y) \in D)$, il existe alors 2 champs de normales unitaires possibles :

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{p}{\sigma} \\ -\frac{q}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma} \end{pmatrix},\ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} +\frac{p}{\sigma} \\ +\frac{q}{\sigma} \\ -\frac{1}{\sigma} \end{pmatrix} \text{ avec } p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

Les vecteurs $\vec{n}_1$ font un angle aigu avec Oz, en effet leur troisième composante est positive, lorsque l'on choisit ce champ de vecteurs on dit que la surface est orientée "vers le haut".
Les vecteurs $\vec{n}_2$ font un angle obtus avec Oz, en effet leur troisième composante est négative, lorsque l'on choisit ce champ de vecteurs on dit que la surface est orientée "vers le bas".

Orientation d'une surface

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

7.3.2 Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée.

Exercices :
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15

Définition 7.3.1. *Soit S une surface.*
On oriente S en choisissant un champ de normales unitaires $\vec{n}(M)$.
Soit $\vec{V}(M)$ un champ de vecteurs. On définit le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers la surface S par l'intégrale de surface :

$$\Phi_S\left(\vec{V}\right) = \int\int_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma$$

Dans le cas particulier où la surface S est définie par une équation explicite, on peut démontrer la proposition :

Proposition 7.3.1. *La surface S est définie par l'équation*

$$(z = \varphi(x, y),\ (x, y) \in D),$$

on suppose que φ est différentiable.
La surface est orientée, $\varepsilon = 1$ si le champ de normales fait un angle aigu avec Oz , $\varepsilon = -1$ sinon . On note

$$p(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y), q(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Le champ de vecteurs $\vec{V}$ a pour composantes V_1, V_2, V_3, on note

$$\widetilde{V}_1(x,y) = V_1(x,y,\varphi(x,y)), \widetilde{V}_2(x,y) = V_2(x,y,\varphi(x,y)), \widetilde{V}_3(x,y) = V_3(x,y,\varphi(x,y))$$

On a alors l'expression du flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers la surface S orientée :

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{V}) &= \iint_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma \\ &= \varepsilon \iint_D \left(-p(x,y)\widetilde{V}_1(x,y) - q(x,y)\widetilde{V}_2(x,y) + \widetilde{V}_3(x,y)\right) dxdy\end{aligned}$$

Démonstration :

Les normales unitaires à S sont données par : $\vec{n} = \varepsilon\left(-\frac{p}{\sigma}, -\frac{q}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)$.

Si on a : $\vec{V} = (V_1(x,y,z), V_2(x,y,z), V_3(x,y,z))$
On obtient alors

$$\vec{V}\cdot\vec{n} = \varepsilon\frac{-p(x,y)V_1(x,y,z) - q(x,y)V_2(x,y,z) + V_3(x,y,z)}{\sigma(x,y)}.$$

Or sur S on a $z = \varphi(x,y)$, en utilisant la définition de $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2, \widetilde{V}_3$, on obtient :

$$\vec{V}\cdot\vec{n} = \varepsilon\frac{-p(x,y)\widetilde{V}_1(x,y) - q(x,y)\widetilde{V}_2(x,y) + \widetilde{V}_3(x,y)}{\sigma(x,y)},$$

d'où en utilisant la définition de l'intégrale de surface :

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{V}) &= \iint_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma \\ &= \varepsilon \iint_D \left(-p(x,y)\widetilde{V}_1(x,y) - q(x,y)\widetilde{V}_2(x,y) + \widetilde{V}_3(x,y)\right) dxdy\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices de cours

Exercice A.1.1 Ch7-Exercice1

S est la sphère de centre O et de rayon R

1. Donner une paramétrisation de S en précisant bien dans quel domaine Δ varient les paramètres u, v.
2. Calculer $\sigma(u, v)$.
3. Calculer l'aire de S.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.2 Ch7-Exercice2

a, b, c sont 3 fonctions différentiables, u, v sont 2 nombres fixés, on définit l'arc P_0P_1 paramétré par

$$\begin{cases} x(t) = a(u+t, v) \\ y(t) = b(u+t, v) & t : 0 \to h. \\ z(t) = c(u+t, v) \end{cases}$$

Montrer que l'arc P_0P_1 admet un vecteur tangent en P_0. Donner les composantes de ce vecteur.

Solution

Exercice A.1.3 Ch7-Exercice3

La surface S est plane et contenue dans le plan $z = 0$. On veut appliquer le théorème VII.1.2.

1. Que vaut alors D ?
2. Que vaut $\varphi(x, y), \sigma(x, y)$?
3. Utiliser le théorème VII.1.2 pour calculer l'aire de S et montrer que l'on obtient le résultat classique énoncé au début de ce chapitre.

Solution

Exercice A.1.4 Ch7-Exercice4

On veut calculer l'aire de S définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2 \text{ et } z \leq 4\}$.

1. Quel est le domaine D ?
2. Calculer $\sigma(x, y)$.
3. Calculer l'aire de S (il est conseillé d'utiliser les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale double).

   Réponse : $\frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 1)$

Solution

Exercice A.1.5 Ch7-Exercice5

1. S est une surface dont l'équation cartésienne explicite est $(y = \eta(x,z), (x,z) \in \widehat{D})$. On suppose que η est une fonction différentiable, donner dans ce cas une expression permettant de calculer l'aire de S par une expression analogue à celle donnée dans le théorème VII.1.2
2. Même question dans le cas où S est une surface dont l'équation cartésienne explicite est $(x = \psi\left(y,z\right), (y,z) \in \widetilde{D})$. On suppose que ψ est différentiable.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch7-Exercice6

L'aire définie dans le théorème VII.1.3 est bien positive, pourquoi ?

Solution

Exercice A.1.7 Ch7-Exercice7

On suppose que S est plane, que la projection de S dans le plan xOy est D. Voir figure qui suit

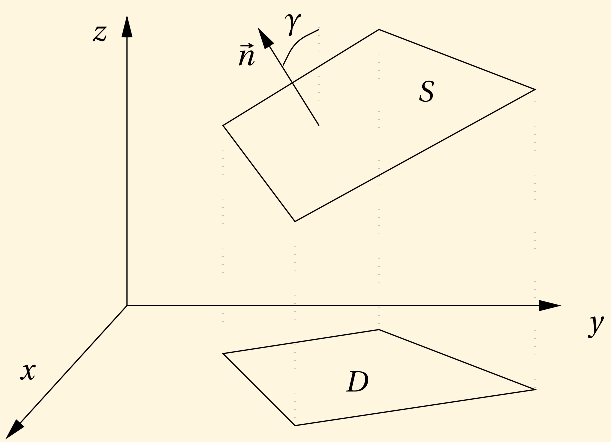


FIGURE A.1.1: aire d'une surface plane

1. Remarquer que dans ce cas $\cos\gamma$ est une constante.
2. En déduire une relation entre l'aire de S et l'aire de D.
3. Etait-il possible de prévoir ce résultat intuitivement ?

Solution

Exercice A.1.8 Ch7-Exercice8

On définit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + z^2 = 4, x + y < 2, y > 0, z > 0\}$

1. Faire une figure représentant S.
2. Montrer que S admet une équation cartésienne explicite $(z = \varphi\left(x, y\right), (x, y) \in D)$. Tracer D.
3. Déterminer (quasiment sans calculs) la normale unitaire qui fait un angle aigu avec Oz.
4. En déduire la formule donnant l'aire de S à l'aide d'une intégrale double en x, y.
5. Calculer l'aire de S.
6. Calculer l'aire de S en paramétrant S à l'aide des coordonnées cylindriques.
7. Retrouver l'aire de S à l'aide d'aires connues.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch7-Exercice9

S est une surface dont l'équation cartésienne explicite est $(y = \psi(x,z), (x,z) \in \widetilde{D})$. Donner dans ce cas une expression permettant de calculer l'aire de S par une expression analogue à celle donnée dans le théorème VII.1.3

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch7-Exercice10

On définit la surface S par

$$z = 2x + 2y, x > 0, y > 0, x + 2y < 4$$

On utilise les notations du théorème VII.2.1.

1. Calculer $\sigma(x, y)$
2. Faire une figure représentant D.
3. Que vaut l'aire de D ? En déduire l'aire de S. Revoir l'exercice A.1.7.
4. On suppose que S est homogène (c'est à dire sa masse surfacique est constante), calculer les coordonnées du centre de gravité de S.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch7-Exercice11

Soit le champ de vecteurs $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\overrightarrow{OM}$ où $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers une sphère de rayon R et de centre O (réponse : $\frac{q}{\epsilon_0}$)

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch7-Exercice12

On définit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + z^2 = 4, x + y < 2, y > 0, z > 0\}$, on suppose que S est homogène (c'est à dire que sa masse surfacique est constante). Calculer l'ordonnée du centre de gravité de S. On choisira la paramétrisation de S pour laquelle les calculs sont les plus simples (réponse : $\frac{3}{2}$).

Solution

Exercice A.1.13 Ch7-Exercice13

1. S est la demi-sphère de centre O et de rayon R, située dans le demi-espace $x \geq 0$, on oriente la surface par les normales unitaires qui font un angle obtus avec Ox, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.
2. S est la surface d'équation $z = x^2 + y^2$, on oriente la surface par les normales unitaires qui font un angle obtus avec Oz, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.
3. S est le plan d'équation $2x - 3y + 5z = 8$, on oriente la surface par les normales unitaires qui font un angle aigu avec Oy, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.
4. S est la surface d'équation $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$, on oriente la surface vers l'intérieur, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch7-Exercice14

On définit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.
On oriente S "vers le haut". On définit le champ de vecteurs $\vec{V} = (y,z,x)$.

1. Faire une figure représentant S.
2. Calculer le champ de normales unitaires $\vec{n}$ qui oriente la surface "vers le haut".
3. Paramétrer S en utilisant les coordonnées cylindriques.
4. Calculer le flux du champ de vecteur $\vec{V}$ à travers S (réponse : 1).

Solution

Exercice A.1.15 Ch7-Exercice15

Soit la surface S d'équation $z = x^2 + y^2$ $(z \leq 1)$ et le champ de vecteurs $\vec{V}$ de composantes $(xz, z, -\frac{z^2}{2})$. On oriente S par les normales qui font un angle aigu avec Oz. On reprend les notations de la proposition VII.3.1.

1. Faire une figure représentant S et D.
2. Calculer $p(x,y), q(x,y), \widetilde{V}_1(x,y), \widetilde{V}_2(x,y), \widetilde{V}_3(x,y)$, que vaut ε ?
3. Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers S.(Réponse : $-\frac{\pi}{2}$)

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.1 calcul d'aires gauches

1. Calculer l'aire du tore (r et R sont deux réels fixés tels que $0 < r < R$, et les paramètres vérifient $\theta \in [0, 2\pi[$, $\phi \in [0, 2\pi[$.

$$\begin{cases} x &= (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ y &= (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ z &= r\sin\theta) \end{cases}$$

2. Calculer l'aire de la portion de surface d'équation $z = \frac{1}{2a}(x^2 - y^2)$ qui se projette dans le plan $z = 0$ sur le disque d'équation $x^2 + y^2 \leq a^2$.
3. On considère la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - ax = 0$. Calculer l'aire de la surface découpée sur la demi-sphère par le cylindre, de 2 façons différentes en utilisant des paramétrisations différentes de la demi-sphère.
4. On considère le cône d'équation $x^2 + y^2 = z^2$, et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Calculer l'aire de la surface découpée sur le cône par le cylindre.
5. On considère la surface définie par

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \leq z \leq y\right\}$$

   (a) Quelle est la projection de Σ sur le plan $y = 0$?

   (b) Donner deux paramétrisations distinctes de Σ.

   (c) Calculer l'aire de Σ.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 aire, masse, flux

1. On considère la surface définie par

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x-2y+2z=0,\ x\geq 0,\ z\geq 0,\ y\leq 1\right\}$$

   (a) Calculer l'aire de Σ.

   (b) Calculer la masse de Σ, en supposant que la masse surfacique est $\mu(x,y,z) = x+y+z$.

   (c) Calculer le flux à travers Σ du champ de vecteurs $\vec{V}(x^2+1, y^2, z^2)$ (on orientera la surface Σ par la normale qui fait un angle aigu avec l'axe Oy).

2. On considère la surface $\mathcal{S}$ qui limite le volume

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \quad x-2y+2z\leq 0,\ x\geq 0,\ z\geq 0,\ y\leq 1\right\}$$

   Calculer le flux à travers $\mathcal{S}$ du champ de vecteurs $\vec{V}$ (on orientera la surface $\mathcal{S}$ par la normale intérieure).

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 intégrale surfacique, flux

1. On considère la surface définie par

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + 2y + z = 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

   (a) Exprimer l'intégrale surfacique $\int\int_\Sigma f\, d\sigma$ à l'aide d'une intégrale double en x et y, puis d'une intégrale double en y et z, puis d'une intégrale double en x et z.

   (b) En déduire l'aire de Σ.

   (c) On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(-y, -z, -x)$. On oriente Σ par la normale unitaire dont la troisième composante est positive. Calculer le flux de $\mathrm{rot}\vec{V}$ à travers Σ.

2. On considère la surface $\mathscr{S}$ qui limite le volume

$$\mathscr{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x + 2y + z \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

   On considère le champ de vecteurs $\vec{U}(0, 0, z)$. On oriente $\mathscr{S}$ par la normale unitaire $\vec{n}$ dirigée vers l'extérieur de $\mathscr{V}$.

   (a) Donner les composantes de $\vec{n}$.

   (b) Calculer le flux de $\vec{U}$ à travers $\mathscr{S}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.4 flux

1. Soit Σ la sphère de centre 0 et de rayon R, orientée par la normale extérieure. Calculer le flux à travers Σ du champ de vecteurs $\vec{V}(x, y, 0)$.
2. On considère la surface définie par

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z = x^2 + y^2,\ x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1\right\}$$

   orientée par sa normale qui fait un angle aigu avec Oz. Calculer le flux à travers Σ des champs de vecteurs $\vec{U}(0, 0, 1)$ et $\vec{V}(y, x, z)$.
3. On considère la surface définie par

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y^2 + z^2 = 4,\ x + y \geq 2,\ z \geq 0,\ x + 2y \leq 6\}$$

   orientée par sa normale qui fait un angle aigu avec Oz. Calculer le flux à travers Σ du champ de vecteurs $\vec{U}(x^2 + y^2, zy, 1)$, en utilisant 2 paramétrisations distinctes de la surface Σ.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 sphère

1. Calculer la masse d'une sphère Σ de centre 0 et de rayon R, de densité surfacique $\mu(x, y, z) = \frac{|z|}{R}$.
2. On considère le champ de vecteurs

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\overrightarrow{OM}$$

où on a posé $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$, comme d'hab.
Montrer que le flux de $\vec{E}$ à travers Σ orientée par sa normale extérieure est $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 intégrale surfacique, flux

1. On considère la surface définie par

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = z,\ 0 \le z \le 1\right\}$$

   (a) Exprimer l'intégrale surfacique $\int\int_\Sigma f\, d\sigma$ à l'aide d'une intégrale double en x et y.

   (b) En déduire l'aire de Σ.

   (c) On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(0, x+z, z+y)$. On oriente Σ par la normale unitaire dont la troisième composante est positive. Calculer le flux de $\mathrm{rot}\vec{V}$ à travers Σ.

2. On considère la surface $\mathscr{S}$ qui limite le volume

$$\mathscr{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 \le z \le 1\right\}$$

   On oriente $\mathscr{S}$ par la normale unitaire $\vec{n}$ dirigée vers l'extérieur de $\mathscr{V}$. On considère le champ de vecteurs $\vec{U}(-2x, -2y, 1)$.

   (a) Donner les composantes de $\vec{n}$.

   (b) Calculer le flux de $\vec{U}$ à travers $\mathscr{S}$.

Exercice A.2.7 intégrale surfacique, flux

On considère la surface définie par

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = R^2,\ h_1 \leq z \leq h_2,\ y \geq 0\right\}$$

1. Donner une paramétrisation de Σ.
2. Exprimer l'intégrale surfacique $\int\int_\Sigma f\, d\sigma$ à l'aide de cette paramétrisation.
3. Est-il possible de calculer l'intégrale surfacique $\int\int_\Sigma f\, d\sigma$ à l'aide d'une intégrale double en x et y ?
4. On considère le champ de vecteurs $\vec{V}(-y, -z, -x)$. Calculer le flux de $\mathrm{rot}\vec{V}$ à travers Σ (préciser l'orientation choisie).

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Solution de l'exercice A.1.1

$$\left\{\begin{array}{l} x = R\cos u \cos v \\ y = R\sin u \cos v \\ z = R\sin v \end{array}\right. \quad , \quad \begin{array}{l} 0 \leq u < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\sigma(u, v) = R^2 \cos v$$

$$A = 4\pi R^2$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.2

Les fonctions x, y, z sont dérivables car composées de fonctions différentiables, le vecteur tangent existe, c'est le vecteur de composantes $\vec{T} = (x'(0), y'(0), z'(0))$.

En utilisant les résultats sur les dérivées partielles les composantes de $\vec{T}$ sont encore égales à :

$$\vec{T} = \left(\frac{\partial a}{\partial u}(u,v), \frac{\partial b}{\partial u}(u,v), \frac{\partial c}{\partial u}(u,v)\right).$$

Retour à l'exercice ▲

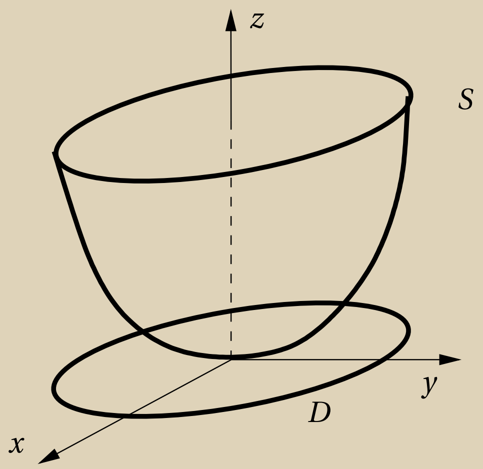
Solution de l'exercice A.1.3

$$D = S, \quad \phi(x, y) = 0, \quad \sigma(x, y) = 1.$$

On retrouve bien sûr :

$$\text{aire } S = \iint_S dxdy$$

Retour à l'exercice ▲



D est le disque de centre O et de rayon 2.

$$\sigma(x,y) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$A = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \frac{2\pi}{8}\int_1^{17}\sqrt{u}\,du = \frac{\pi}{6}(17^{3/2}-1)$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

1. On pose :

$$p(x,z) = \frac{\partial \eta}{\partial x}(x,z),\, q(x,z) = \frac{\partial \eta}{\partial z}(x,z),\, \sigma(x,z) = \sqrt{1 + p^2(x,z) + q^2(x,z)},$$

   alors :

$$aire(S) = \iint_{\widehat{D}} \sigma(x,z)\,dxdz.$$

2. On pose :

$$p(y,z) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(y,z),\, q(y,z) = \frac{\partial \psi}{\partial z}(y,z),\, \sigma(y,z) = \sqrt{1 + p^2(y,z) + q^2(y,z)},$$

   alors :

$$aire(S) = \iint_{\widetilde{D}} \sigma(y,z)\,dydz.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

L'aire définie est bien positive puisque γ est un angle aigu.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

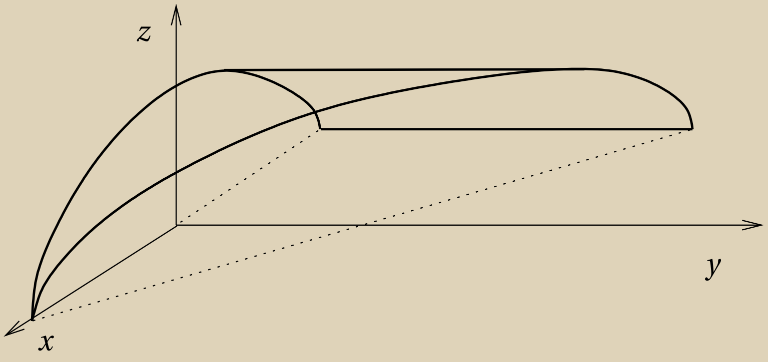
$$\text{aire } D = \cos\gamma \text{ aire } S$$

D et S sont planes. L'angle entre ces 2 surfaces est γ (puisque γ est l'angle entre les normales respectives à ces 2 surfaces). D est la projection de S, donc le rapport entre leurs aires est $\cos\gamma$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

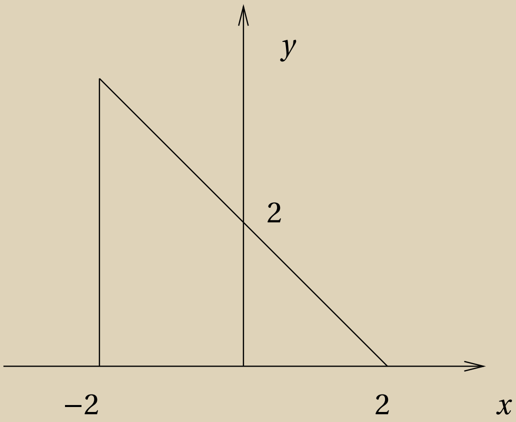
1.



2.

$$z > 0, \text{ donc } z = \sqrt{4 - x^2}$$

D est la projection de S sur xOy.



3. On utilise l'équation implicite pour obtenir un vecteur normal $(2x, 0, 2z)$.
$\left(\frac{x}{2}, 0, \frac{z}{2}\right)$ est le vecteur unitaire qui fait un angle aigu avec Oz (puisque sa troisième composante est positive).

4.
$$\cos\gamma = \frac{z}{2},\ \ \sigma(x,y) = \frac{2}{\phi(x,y)} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$
$$A = \int\int_D \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,dy$$

5.
$$A = \int_{-2}^{2} \frac{4-2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Pourquoi ?

On pose $x = 2u$, on obtient :
$$A = 4\,[Arcsin u]_{-1}^{+1} = 4\pi.$$

6. On pose :

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = u \\ z = 2\sin\theta \end{cases}$$

Donc bien sûr, on a $x^2 + z^2 = 4, \ \forall u, \forall\theta$

On traduit maintenant sur u et θ les conditions

$$x + y < 2, y > 0, z > 0.$$

On obtient ainsi le domaine Δ

$$\Delta = \{(u,\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 < \theta < \pi, 0 < u < 2 - 2\cos\theta\}$$

D'autre part

$$\sigma(u,\theta) = 2$$

Ceci est un résultat général quand on paramètre un cylindre à l'aide des coordonnées cylindriques, on obtient

$$\sigma(u,\theta) = R, \text{ où } R \text{ est le rayon du cylindre}$$

On obtient l'expression de l'aire :

$$A = \int_0^{\pi} \int_0^{2-2\cos\theta} 2\,du\,d\theta = 4\pi.$$

7. S est un quart de cylindre de rayon 2 et de longueur 4, donc l'aire de S est $\frac{1}{4}(4\pi \times 4)$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

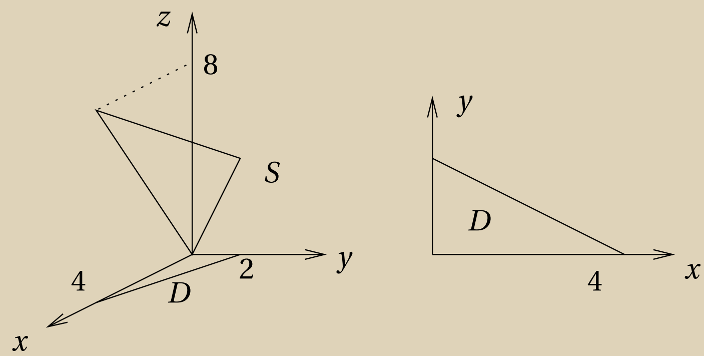
$$aire(S) = \iint_{\widetilde{D}} \frac{1}{\cos\beta(x,\psi(x,z),z)}\, dxdz.$$

où $\cos\beta$ est la deuxième composante du champ de normales qui fait un angle aigu avec Oy.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

1. $$\sigma(x,y) = \sqrt{1+4+4} = 3$$

2. 

3. L'aire de D vaut 4, donc l'aire de S vaut $3 \times 4 = 12$
4. Si μ est la masse surfacique (constante), la masse de S est 12μ.

   On a
   $$x_G = \frac{1}{m}\iint_D \mu x \sigma(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{4}\iint_D x\,dx\,dy$$
   On remarque que le centre de gravité de S a la même abscisse que le centre de gravité de D, ce qui est normal car la surface est plane et homogène.

   Après calculs on trouve :
   $$x_G = \frac{1}{4}\int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} x\,dy\,dx = \frac{4}{3}$$

On obtient de façon similaire :

$$y_G = \frac{1}{4}\int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} y\,dy\,dx = \frac{2}{3}$$

$$z_G = \frac{1}{4}\int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} z\,dy\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} (2x+2y)\,dy\,dx = 2x_G + 2y_G$$

La valeur de z_G était prévisible puisque le centre de gravité appartient à la surface (ce n'est plus le cas lorsque la surface n'est pas plane).

Retour à l'exercice ▲

Solution de l’exercice A.1.11

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{OM}}{R}, \ \vec{E}.\vec{n} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

$$\Phi(\vec{V}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int\int_S d\sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \text{ aire } S = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Retour à l’exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

Revoir l'exercice A.1.8, on peut paramétrer à l'aide de x et y, ou des coordonnées cylindriques.

$$y_G = \frac{1}{m}\iint_S y\mu d\sigma = \frac{1}{A}\iint_S y d\sigma$$

Bien sûr la masse surfacique (qui est constante) n'intervient pas dans le calcul des coordonnées du centre de gravité.

En utilisant les coordonnées cartésiennes on a :

$$\iint_S y d\sigma = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x} \frac{2y}{\sqrt{4-x^2}} dy dx = \int_{-2}^{2} \frac{4+x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

On pourrait calculer cette intégrale en effectuant le changement de variable : $x = 2\sin\theta$.

En utilisant les coordonnées cylindriques on a :

$$\iint_S y d\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^{2-2\cos\theta} 2u du d\theta = \int_0^{\pi} (2-2\cos\theta)^2 d\theta = 6\pi$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

1. $$\vec{n} = (-\frac{x}{R}, -\frac{y}{R}, -\frac{z}{R}).$$

2. $$\vec{n} = (\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}).$$

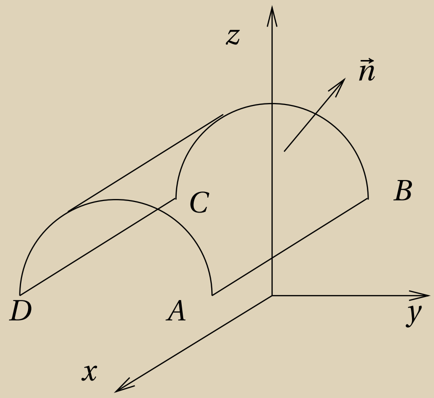
3. $$\vec{n} = (-\frac{2}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}, -\frac{5}{\sqrt{38}}).$$

4. $$\vec{n} = (-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}, -\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}).$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

1.



2. On utilise l'équation implicite, $(0, y, (z-1))$ est un vecteur normal, il est unitaire, il est orienté vers le haut. Pourquoi ?

3.

$$\begin{cases} x = x \\ y = \cos\theta \\ z = 1 + \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 (\text{ car } 0 \leq x \leq 1) \\ 0 \leq \theta \leq \pi (\text{ car } z \geq 1) \end{array}$$

4. $\sigma(x, \theta) = 1$

$$\vec{V}.\vec{n} = yz + x(z-1)$$

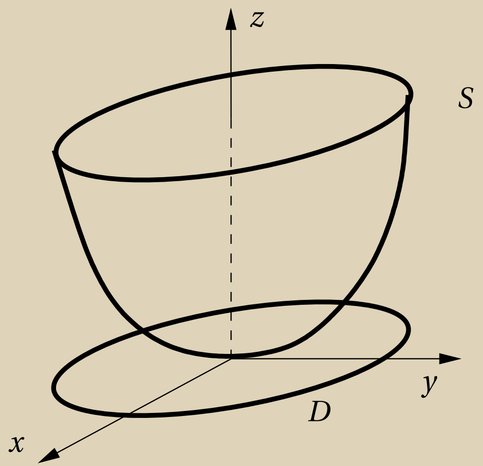
Exprimer le produit scalaire à l'aide de x et de θ.

$$\Phi(\vec{V}) = \int_0^1 \int_0^\pi \cos\theta + \sin\theta\cos\theta + x\sin\theta\, d\theta\, dx = \int_0^1 2x\,dx = 1.$$

Entrainez vous a calculer de façon efficace les intégrales des cosinus et sinus en particulier souvenez-vous que l'intégrale sur une période de cosinus ou sinus est nulle.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15



$$\phi(x,y) = x^2 + y^2$$

$$p(x,y) = 2x, q(x,y) = 2y$$

$$\widetilde{V}_1 = x(x^2+y^2), \widetilde{V}_2 = x^2+y^2, \widetilde{V}_3 = -\frac{(x^2+y^2)^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{V}) &= \int\int_D -2x^2(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} dxdy \\
&= \int\int_D -2x^2(x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} dxdy
\end{aligned}$$

En effet l'intégrale sur le domaine D qui est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = 0$, d'une fonction impaire en y est nulle.

On utilise les coordonnées polaires :

$$\Phi(\vec{V}) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -2r^5 \cos^2\theta - \frac{r^5}{2} d\theta dr = -\frac{\pi}{2}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.2.7

1. On peut paramétrer l'arc de cercle générateur de cylindre par un angle θ, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,\pi] \times [h_1, h_2] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) & \longmapsto & \left| \begin{array}{lcc} x & = & R\cos\theta \\ y & = & R\sin\theta \\ z & = & z \end{array} \right. \end{array} \tag{A.2.1}$$

2. Par définition :

$$\int\int_\Sigma f\,d\sigma = \int\int_\delta f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right| d\theta\, dz$$

où $\Delta = [0,\pi] \times [h_1, h_2]$ et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left| \begin{array}{c} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \\ 0 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

$$\int\int_\Sigma f\,d\sigma = \int_0^\pi \int_{h_1}^{h_2} R\, f(R\cos\theta, R\sin\theta, z)\; d\theta\, dz$$

3. Comme il est impossible de paramétrer Σ par les coordonnées x et y (on n'obtiendrait pas une application !), il est aussi impossible d'exprimer $\int\int_\Sigma f\,d\sigma$ par une intégrale double en x et y.

4.

$$rot\overrightarrow{V} = \left| \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} -y \\ -z \\ -x \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

Utilisons la paramétrisation φ du 1. pour calculer le flux de $rot\overrightarrow{V}$ à travers Σ dans le sens de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\wedge\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\left|\begin{array}{c} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ 0 \end{array}\right.$, donc sortant par rapport à l'axe du cylindre.

$$\phi=\int\int_{\Sigma} rot\overrightarrow{V}.\overrightarrow{N}dS=\int_0^{\pi}\int_{h_1}^{h_2}\underbrace{rot\overrightarrow{V}.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}_{R\cos\theta+R\sin\theta}d\theta dz$$

$$\begin{aligned}\phi &= \int_0^{\pi} R(h_2-h_1)(\cos\theta+\sin\theta)d\theta \\ &= R(h_2-h_1)\left[\sin\theta-\cos\theta\right]_0^{\pi} \\ &= 2R(h_2-h_1)\end{aligned}$$

Retour à l'exercice ▲