

# MT22-Fonctions de plusieurs variables et applications

---

*Chapitre 8 : Théorèmes intégraux*

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC-UTT



# Chapitre 8

## Théorèmes intégraux

8.1	<a href="#">Théorème de Stokes-Ampère</a> . . . . .	3
8.2	<a href="#">Théorème de Gauss-Ostrogradski</a> . . . . .	4
8.3	<a href="#">Application à l'hydrostatique</a> . . . . .	7

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 8.1 Théorème de Stokes-Ampère

### Exercices :

[Exercice A.1.1](#)

[Exercice A.1.2](#)

[Exercice A.1.3](#)

[Exercice A.1.4](#)

**Théorème 8.0.1.** Soit  $S$  une surface de  $\mathbb{R}^3$  orientée par le choix d'un champ de normales  $\vec{n}$ .

Le bord de  $S$  est une courbe fermée  $\Gamma$ .

La courbe  $\Gamma$  et la surface  $S$  sont orientées de façon cohérente en utilisant la règle du tire-bouchon de Maxwell ou la règle du bonhomme d'Ampère.

$\vec{V}$  est un champ de vecteurs dont les composantes  $V_1, V_2, V_3$  sont continument différentiables.

Alors le flux du rotationnel de  $\vec{V}$  à travers la surface  $S$  est égal à la circulation de  $\vec{V}$  le long de la courbe  $\Gamma$ , c'est à dire

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz$$

Voir la démonstration de ce théorème en exercice.

Le théorème de Green-Riemann est un cas particulier du théorème de Stokes-Ampère. On peut démontrer cette proposition en exercice.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 8.2 Théorème de Gauss-Ostrogradski

### Exercices :

[Exercice A.1.5](#)[Exercice A.1.6](#)[Exercice A.1.7](#)[Exercice A.1.8](#)

**Théorème 8.0.2.** Soit  $\mathcal{V}$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  limité par une surface fermée  $S$  orientée vers l'extérieur de  $\mathcal{V}$  et soit  $\vec{V}$  un champ de vecteurs dont la divergence est une fonction continue, alors l'intégrale de la divergence de  $\vec{V}$  dans  $\mathcal{V}$  est égale au flux de  $\vec{V}$  à travers  $S$ , c'est à dire

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

On peut démontrer ce théorème dans le cas où  $\operatorname{div} \vec{V}(M) = 0$ .

On a vu dans le chapitre analyse vectorielle qu'alors  $\vec{V}(M)$  dérive d'un potentiel vecteur  $\vec{W}$  c'est à dire qu'il existe  $\vec{W}$  vérifiant  $\vec{V}(M) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{W}$ . On a donc

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{W} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

Ecrivons  $S = S_1 \cup S_2$ , soit  $\Gamma$  la frontière commune de  $S_1$  et  $S_2$  : voir figure VIII.1 et remarquer dans chacun des cas l'orientation du bord  $\Gamma$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

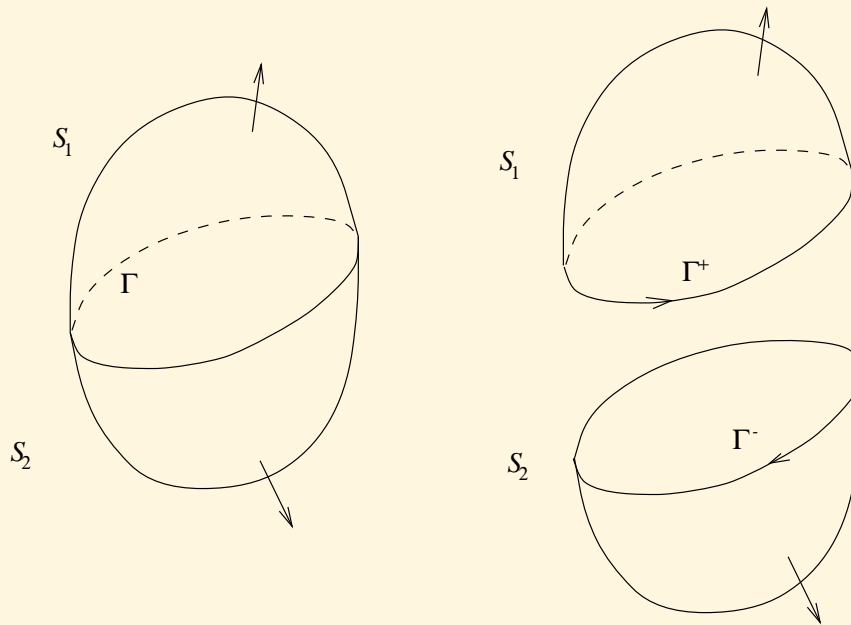


FIGURE 8.1:

Le Théorème de Stokes-Ampère permet d'écrire :

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Gamma^+} \vec{W} d\vec{l}$$

## Théorème de Gauss-Ostrogradski

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot } \vec{W}} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Gamma^-} \vec{W} d\vec{l}$$

la somme de ces deux intégrales est donc nulle. On a donc bien dans ce cas :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{V} dx dy dz = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = 0.$$

## **Théorème de Gauss- Ostrogradski**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## 8.3 Application à l'hydrostatique

### Exercices :

[Exercice A.1.9](#)

[Exercice A.1.10](#)

Si  $S$  est une surface plane d'aire  $A$  qui est soumise à une pression  $p$  constante, alors une force de pression constante  $\vec{F}$  s'exerce sur  $S$ ,

$$\vec{F} = pA\vec{n}^* \quad (8.1)$$

où  $\vec{n}^*$  est le vecteur normal unitaire à  $S$  dirigé "dans le bon sens" (dans le sens de la pression).

Si maintenant la pression n'est pas constante, si la surface  $S$  n'est pas plane, on a

$$\vec{F} = \iint_S p\vec{n}^* d\sigma$$

Vérifier que dans le cas particulier d'une surface plane et d'une pression constante, on retrouve l'expression VIII.1.

Soit un solide  $V$  limité par une surface  $S$ , complètement immergé dans un liquide de masse volumique  $\rho$ .

La surface du liquide est le plan  $z = 0$ , l'axe  $Oz$  est dirigé vers le haut.

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

La pression dans le liquide dépend de  $z$  par la relation

$$p(z) = p_0 - \rho g z,$$

$p_0$  est la pression atmosphérique à la surface du liquide,  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

$\vec{n}$  représente le champ de normales unitaires à  $S$  dirigé vers l'extérieur de  $V$ , alors la force de pression exercée par le liquide sur le solide vaut

$$\vec{F} = \iint_S -p \vec{n} d\sigma$$

en effet la pression s'exerce vers l'intérieur de  $V$  (pression exercée par le liquide sur le solide).

On note  $F_1, F_2, F_3$  les 3 composantes de  $\vec{F}$  :

$$\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$$

$$F_1 = \vec{F} \cdot \vec{i}, \quad F_2 = \vec{F} \cdot \vec{j}, \quad F_3 = \vec{F} \cdot \vec{k}$$

d'où :

$$F_1 = \iint_S -p \vec{i} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad F_2 = \iint_S -p \vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad F_3 = \iint_S -p \vec{k} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (8.2)$$

Appliquer le théorème de Gauss-Ostrogradsky aux intégrales VIII.2, en déduire que :

$$\vec{F} = \rho g \text{ vol}(V) \vec{k}$$

On retrouve la poussée d'Archimède bien connue : la force de pression  $\vec{F}$  s'exerce verticalement "vers le haut" et sa norme est égale au poids du liquide déplacé.

## Application à l'hydrostatique

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



# Annexe A

## Exercices

A.1	Exercices de cours . . . . .	10
A.2	Exercices de TD . . . . .	25

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## A.1 Exercices de cours

A.1.1	Ch8-Exercice1 . . . . .	11
A.1.2	Ch8-Exercice2 . . . . .	14
A.1.3	Ch8-Exercice3 . . . . .	15
A.1.4	Ch8-Exercice4 . . . . .	17
A.1.5	Ch8-Exercice5 . . . . .	18
A.1.6	Ch8-Exercice6 . . . . .	20
A.1.7	Ch8-Exercice7 . . . . .	21
A.1.8	Ch8-Exercice8 . . . . .	22
A.1.9	Ch8-Exercice9 . . . . .	23
A.1.10	Ch8-Exercice10 . . . . .	24

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.1** Ch8-Exercice1

On va démontrer le théorème de Stokes Ampère dans le cas où la surface  $S$  a une équation explicite :  $z = \phi(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ .

On note  $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ .

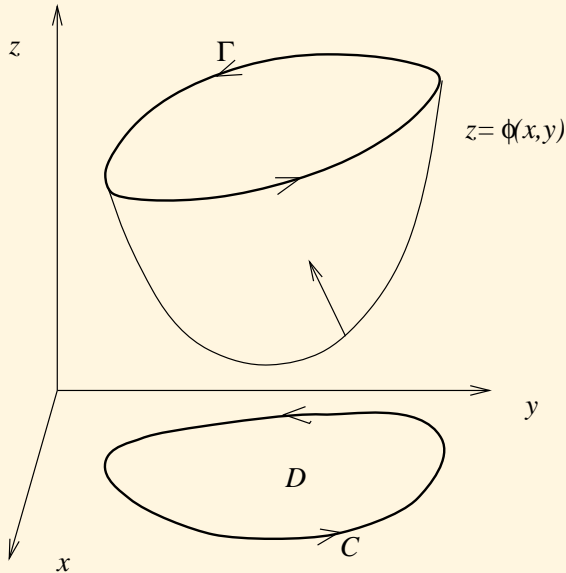


FIGURE A.1.1:

1. (a) Calculer  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

- (b) On appelle  $C$  le bord de  $D$  orienté dans le sens trigonométrique, on suppose qu'une paramétrisation de  $C$  est

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \end{cases} \quad t: t_0 \rightarrow t_1$$

On choisit pour  $\Gamma$  l'orientation correspondant à l'orientation de  $C$  conformément à la figure A.1.1 Quelle est alors l'orientation de la surface ?

- (c) Donner l'expression du flux de  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  à travers  $S$ .
2. (a) Utiliser la paramétrisation de  $C$  pour en déduire une paramétrisation de  $\Gamma$  de la forme

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \\ z = c(t) \end{cases} \quad . \text{ Donner l'expression de } c(t) ?$$

- (b) On note

$$\tilde{V}_1(x, y) = V_1(x, y, \phi(x, y)), \tilde{V}_2(x, y) = V_2(x, y, \phi(x, y))$$

Montrer que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy \\ &= \int_C \tilde{V}_1 dx + \tilde{V}_2 dy \end{aligned}$$

- (c) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer  $\int_C \tilde{V}_1 dx + \tilde{V}_2 dy$ .
- (d) En déduire :

## Exercice A.1.1

Ch8-Exercice1

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy &= \iint_D \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, \phi(x, y)) \\ &\quad - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, \phi(x, y)) \\ &\quad + \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

(e) On note

$$P(x, y) = V_3(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y), \quad Q(x, y) = V_3(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y).$$

Montrer que

$$\int_C P dx + Q dy = \int_{\Gamma} V_3 dz.$$

(f) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer  $\int_C P dx + Q dy$ .

(g) En déduire :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} V_3 dz &= \iint_D -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) \\ &\quad + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

3. Utiliser les équations A.1.1 et A.1.2 pour conclure :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy + V_3 dz$$

Solution

## Exercice A.1.1

Ch8-Exercice1

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.2** Ch8-Exercice2

On définit la surface  $S$  par  $\{z = 0, (x, y) \in D\}$ , on appelle  $\Gamma$  le bord de  $D$  orienté dans le sens trigonométrique.

On définit le champ de vecteurs  $\vec{V} = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ .

1. Calculer  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ .
2. Déterminer la normale unitaire à  $S$  dont l'orientation est cohérente avec l'orientation de  $\Gamma$ .
3. Calculer le flux du champ de vecteurs  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  à travers la surface  $S$  ainsi orientée.
4. Retrouver l'égalité de Green-Riemann :

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

**Solution**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.3** Ch8-Exercice3

1. On définit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ .

On oriente  $S$  par les normales qui font un angle aigu avec  $Oz$ . On appelle  $\Gamma$  le bord de  $S$  orienté de façon cohérente avec  $S$ .

- Faire une figure représentant  $S$  et  $\Gamma$ , préciser sur la figure l'orientation de  $\Gamma$ .
- Paramétrer  $\Gamma$ .
- Calculer la circulation le long de  $\Gamma$  du champ de vecteurs

$$\vec{U} = \left( \frac{z^2}{2}, \frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2} \right).$$

Réponse : 1

- Utiliser le théorème de Stokes-Ampère pour retrouver le résultat précédent.

2. On définit la surface  $S$  d'équation  $z = x^2 + y^2, z \leq 1$ . On oriente  $S$  par les normales qui font un angle aigu avec  $Oz$ . On appelle  $\Gamma$  le bord de  $S$  orienté de façon cohérente avec  $S$ .

- Faire une figure représentant  $S$  et  $\Gamma$ , préciser sur la figure l'orientation de  $\Gamma$ .
- Paramétrer  $\Gamma$ .
- Calculer la circulation le long de  $\Gamma$  du champ de vecteurs

$$\vec{U} = \left( \frac{z^2(y-1)}{2}, 1, xyz \right).$$

Réponse :  $-\frac{\pi}{2}$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

(d) Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de Stokes-Ampère .

[Solution](#)

**Exercice A.1.3**  
Ch8-Exercice3

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



**Exercice A.1.4** Ch8-Exercice4

$\mathcal{B}$  est la boule de centre  $O$  et de rayon  $R$ ,  $S$  est la sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  orientée vers l'extérieur de  $\mathcal{B}$ .

$$\vec{V} = (x, y, z).$$

1. Quel est le volume de  $\mathcal{B}$ ? En déduire

$$\iiint_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \vec{V} \, dx \, dy \, dz$$

2. Quelle est l'aire de  $S$ ? En déduire

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Comparer.

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.5** Ch8-Exercice5

Soit

$$\vec{V}(M) = \begin{pmatrix} V_1(x, y, z) \\ V_2(x, y, z) \\ V_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(x, y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

On note  $\vec{U}_3(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3(x, y, z) \end{pmatrix}$

On suppose que  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D_3, \varepsilon(x, y) \leq z \leq \phi(x, y)\}$  conformément à la figure A.1.2.

1. (a) Calculer  $\operatorname{div} \vec{U}_3(M)$
- (b) Montrer que :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{U}_3(M) dx dy dz = \iint_{D_3} V_3(x, y, \phi(x, y)) - V_3(x, y, \varepsilon(x, y)) dx dy.$$

2. (a) On appelle  $S^+$  la surface d'équation  $\{z = \phi(x, y), (x, y) \in D_3\}$ , on oriente cette surface "vers le haut".  
Calculer  $\Phi_{S^+}(\vec{U}_3)$ .
- (b) On appelle  $S^-$  la surface d'équation  $\{z = \varepsilon(x, y), (x, y) \in D_3\}$ , on oriente cette surface "vers le bas".  
Calculer  $\Phi_{S^-}(\vec{U}_3)$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

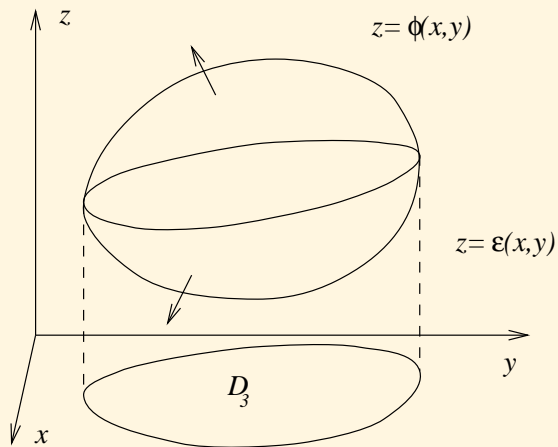


FIGURE A.1.2:

(c) En déduire que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{U}_3 dx dy dz = \Phi_S(\vec{U}_3).$$

3. Des calculs similaires pour  $V_2$  et  $V_3$  permettraient de terminer la démonstration du théorème de Gauss-Ostrogradski.

**Solution**

### Exercice A.1.5

Ch8-Exercice5

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.6 Ch8-Exercice6

Soit  $\mathcal{V}$  un volume de  $\mathbb{R}^3$  dont la frontière est  $S$ . Ce volume contient des charges électriques dont la densité est  $\sigma$ . La quantité de charges contenues dans  $\mathcal{V}$  est donc :

$$q = \iiint_{\mathcal{V}} \sigma(x, y, z) dx dy dz$$

$\vec{E}$  est le champ électrique. La forme locale de la loi de Gauss est :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 \text{ constante}$$

En déduire la loi de Gauss :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}$$

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.7** Ch8-Exercice7

On définit le volume  $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ ,

Le champ de vecteurs  $\vec{V} = (z, x, y)$ .

Que vaut  $\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V} dx dy dz$ ?

Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski.

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

### Exercice A.1.8 Ch8-Exercice8

$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ . On appelle  $S$  la surface qui limite  $\mathcal{V}$ . On oriente  $S$  vers l'extérieur de  $\mathcal{V}$ .

1. Faire une figure représentant  $\mathcal{V}$  et les différentes parties de  $S$ .
2. Paramétrer chacune des parties de  $S$  et déterminer pour chacune d'elles les vecteurs normaux unitaires correctement orientés.
3. On définit  $\vec{V} = (xz, z, -\frac{z^2}{2})$ 
  - (a) Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}$  à travers  $S$ .
  - (b) Calculer  $\operatorname{div} \vec{V}$ , comparer.
4. On définit  $\vec{V} = (-xz, x, zx^2)$ 
  - (a) Calculer le flux du champ de vecteurs  $\vec{V}$  à travers  $S$ . Réponse :  $-\frac{\pi}{4}$
  - (b) Retrouver le résultat précédent en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski.

**Solution**

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.9** Ch8-Exercice9

$S$  est une surface plane,  $\vec{n}$  est un vecteur normal unitaire à  $S$ ,  $p$  est la pression supposée constante. Donner l'expression de la force de pression

$$\vec{F} = \iint_S p \vec{n} d\sigma$$

Solution

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.1.10** Ch8-Exercice10

L'espace est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$S$  est une surface fermée qui limite un volume  $V$ , on note  $\vec{n}$  le champ de vecteurs normaux unitaires dirigés vers l'extérieur de  $V$ .

La fonction  $p$  est définie par :  $p(z) = p_0 - \rho g z$ ,  $p_0, \rho, g$  sont des constantes.

On définit les champs de vecteurs  $\vec{v}_1 = -p\vec{i}$ ,  $\vec{v}_2 = -p\vec{j}$ ,  $\vec{v}_3 = -p\vec{k}$ .

Utiliser le théorème de Gauss-Ostrogradski pour calculer :

$$\iint_S \vec{v}_1 \cdot \vec{n} d\sigma, \iint_S \vec{v}_2 \cdot \vec{n} d\sigma, \iint_S \vec{v}_3 \cdot \vec{n} d\sigma$$

[Solution](#)

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)



## A.2 Exercices de TD

A.2.1	<a href="#">reprise d'exo du chapitre 7</a> . . . . .	26
A.2.2	<a href="#">TD8-Exercice2</a> . . . . .	28
A.2.3	<a href="#">TD8-Exercice3</a> . . . . .	29

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

**Exercice A.2.1** reprise d'exo du chapitre 7

1. On considère la surface  $\mathcal{S}$  qui limite le volume

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x - 2y + 2z \leq 0, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad y \leq 1\}$$

et orientée par la normale intérieure. On a déjà calculé que le flux à travers  $\mathcal{S}$  du champ de vecteurs  $\vec{V}(x^2 + 1, y^2, z^2)$  vaut  $-1$ . Retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.

2. Soit  $\Sigma$  la sphère de centre 0 et de rayon  $R$ , orientée par la normale extérieure. On a déjà calculé que le flux à travers  $\Sigma$  du champ de vecteurs  $\vec{V}(x, y, 0)$  vaut  $\frac{8\pi R^3}{3}$ . Retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.
3. Soit  $\mathcal{C}$  le bord de la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad h_1 \leq z \leq h_2, \quad y \geq 0\}$$

La circulation de  $\vec{V}(-y, -z, -x)$  le long de cette courbe vaut  $2R(h_2 - h_1)$ . Retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.

4. On considère la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 = z, \quad z + 2y \leq 3\}$$

et le champ de vecteurs  $\vec{V}(1, \frac{x^3}{3}, 1)$ . Calculer le flux de  $\text{rot } \vec{V}$  à travers  $\Sigma$ . Préciser sur une figure l'orientation choisie. Retrouver le résultat en utilisant un théorème intégral.

5. On considère la surface

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 1 + \sqrt{x^2 + y^2} = z, \quad z \leq 3, \quad x \geq 0 \right\}$$

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

et le champ de vecteurs  $\vec{V}((z-1)^2, x, y)$ . Calculer la circulation de  $\vec{V}$  le long du bord de  $\Sigma$ . Préciser sur une figure l'orientation choisie. Retrouver le résultat en utilisant un théorème intégral.

6. On considère le volume

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

et le champ de vecteurs  $\vec{V}(z, x, y)$ . Calculer de 2 façons différentes  $\int \int \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V} dx dy dz$ .

7. On considère le volume (où  $a > 0$ )

$$\mathcal{V} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right\}$$

et le champ de vecteurs  $\vec{V}(xz^2, -z^2, y^2z)$ . Calculer de 2 façons différentes  $\int \int \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{V} dx dy dz$ .

Solution

**Exercice A.2.1**  
reprise d'exo du  
chapitre 7

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exercice A.2.2** TD8-Exercice2

1. On considère le bord  $\mathcal{C}$  du domaine de  $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2; \quad (y^2 + z^2) \leq 1, y \geq 0, \frac{-1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \right\}$$

(a) Faire une figure.

(b) Calculer l'aire de  $\mathcal{D}$  à l'aide du théorème de Green-Riemann.

2. Soit  $\Gamma$  le bord de la surface

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \frac{-1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

(a) i. Faire une figure.

ii. Donner les composantes d'une normale unitaire à  $\Sigma$ .

(b) Soit une fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

i. Exprimer l'intégrale de surface  $\iint_{\Sigma} f d\sigma$  à l'aide des coordonnées sphériques, puis à l'aide des coordonnées cartésiennes  $(y, z)$ .

ii. En déduire l'aire de  $\Sigma$ .

(c) Soit le champ de vecteurs  $\vec{V}(\frac{-z^2}{2}, xy, y)$ .

Calculer directement le flux de  $\text{rot } \vec{V}$  à travers la surface  $\Sigma$ , puis retrouver ce résultat en utilisant un théorème intégral.

Sommaire  
Concepts

Exemples  
Exercices  
Documents

**Exercice A.2.3** TD8-Exercice3

1. On considère le bord  $\mathcal{C}_1$  du domaine de  $\mathbb{R}^2$

$$\Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \geq 0, -2 \leq y \leq 2, x + 2y \leq 6\}$$

(a) Faire une figure.

(b) En supposant que la densité surfacique est  $\mu(x, y) = 1$ , calculer le moment d'inertie de  $\Sigma_1$  par rapport à l'axe  $Ox$ .

(c) On oriente  $\mathcal{C}_1$  dans le sens trigonométrique. Calculer l'intégrale curviligne  $\int_{\mathcal{C}_1} dx + xy^2 dy$ . Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Green-Riemann.

2. On considère

$$\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, z \geq 0, x + 2y \leq 6\}$$

(a) Faire une figure représentant  $\Sigma_2$  et sa projection sur le plan  $z = 0$ .

(b) Donner les composantes de  $\vec{n}_2$ , normale unitaire à  $\Sigma_2$ . Préciser l'orientation choisie sur la figure.

(c) Soit le champ de vecteurs  $\vec{V}(1, zy, 0)$ . Déterminer le flux de  $\vec{V}$  à travers  $\Sigma_2$ .

3. On considère le domaine de  $\mathbb{R}^3$  suivant

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, z \geq 0, x + 2y \leq 6\}$$

Faire une figure et calculer l'intégrale  $\int \int \int_{\mathcal{V}} z dx dy dz$ .

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

4. On note  $\Sigma$  la surface limitant  $\mathcal{V}$ , orientée par la normale sortant de  $\mathcal{V}$ . On considère le champ de vecteurs  $\vec{V}(1, zy, 0)$ .

- (a) Calculer  $\operatorname{div}\vec{V}$  et calculer le flux de  $\vec{V}$  à travers  $\Sigma$  à l'aide de théorèmes intégraux.
- (b) Décrire les différentes parties de  $\Sigma$ . Donner leurs normales unitaires respectives.
- (c) On définit

$$\Sigma_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad y^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0, \quad x + 2y = 6\}$$

Calculer le flux de  $\vec{V}$  à travers  $\Sigma_3$ . Utiliser les questions précédentes pour retrouver ce résultat.

**Exercice A.2.3**  
TD8-Exercice3

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

# Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le roman à un grain où le concept est mentionné.

## **G**

Gauss-Ostrogradski.....4

## **H**

Hydrostatique ..... 7

## **S**

Stokes-Ampère ..... 3

[Sommaire](#)  
[Concepts](#)

[Exemples](#)  
[Exercices](#)  
[Documents](#)

## Solution de l'exercice A.1.1

1. (a)

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

(b) On utilise la règle du tire-bouchon de Maxwell pour montrer qu'alors la surface est orientée "vers le haut".

(c)  $\varepsilon = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi_S(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) &= \iint_D \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) \left( \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) - \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, \phi(x, y)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) \left( \frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, \phi(x, y)) - \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) \right) dx dy \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

2. (a)

$$\begin{cases} x = a(t) \\ y = b(t) \\ z = c(t) = \phi(a(t), b(t)) \end{cases} \quad t : t_0 \rightarrow t_1.$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} V_1 dx + V_2 dy &= \int_{t_0}^{t_1} V_1(a(t), b(t), c(t)) a'(t) + V_2(a(t), b(t), c(t)) b'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} V_1(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t))) a'(t) + V_2(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t))) b'(t) dt. \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \tilde{V}_1(a(t), b(t)) a'(t) + \tilde{V}_2(a(t), b(t)) b'(t) dt \\ &= \int_C \tilde{V}_1 dx + \tilde{V}_2 dy \end{aligned}$$



(c)

$$\int_C \tilde{V}_1 dx + \tilde{V}_2 dy = \iint_D \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial y}(x, y).$$

On calcule les dérivées partielles de  $\tilde{V}_1$  et  $\tilde{V}_2$

$$\frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) + \frac{\partial V_2}{\partial z}(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial V_1}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) + \frac{\partial V_1}{\partial z}(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$$

(d) Il suffit de recoller les morceaux.

(e)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} V_3 dz &= \int_{t_0}^{t_1} V_3(a(t), b(t), c(t)) c'(t) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} V_3(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t))) \frac{\partial \phi}{\partial x}(a(t), b(t)) a'(t) + V_3(a(t), b(t), \phi(a(t), b(t))) \frac{\partial \phi}{\partial y}(a(t), b(t)) b'(t) dt. \\ &= \int_{t_0}^{t_1} P(a(t), b(t)) a'(t) + Q(a(t), b(t)) b'(t) dt \\ &= \int_C P dx + Q dy \end{aligned}$$

(f)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)$$

d'où

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \frac{\partial V_3}{\partial x}(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial V_3}{\partial y}(x, y, \phi(x, y)) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y)$$

(g) On recolle les morceaux.

3. On a calculé le flux de  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  à travers  $S$  dans la première question, la deuxième question nous permet d'obtenir la circulation de  $\vec{V}$  le long de  $\Gamma$ . On constate l'égalité.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.2

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right).$$

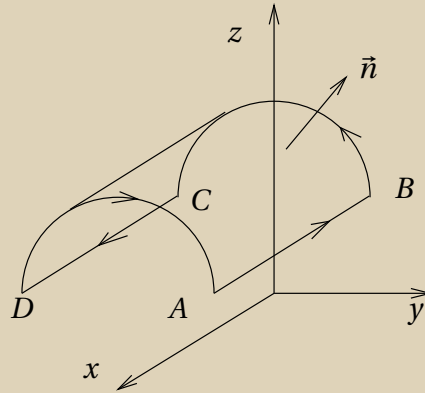
$$\vec{n} = (0, 0, 1).$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

$$\Phi_S(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.3



1. (a)

(b)  $\Gamma$  est constituée de quatre morceaux.

Le segment  $AB$  est paramétré par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad t : 1 \rightarrow 0$$

Le demi-cercle  $BC$  est paramétré par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \cos \theta \\ z = 1 + \sin \theta \end{cases} \quad \theta : 0 \rightarrow \pi$$

Le segment  $CD$  est paramétré par :

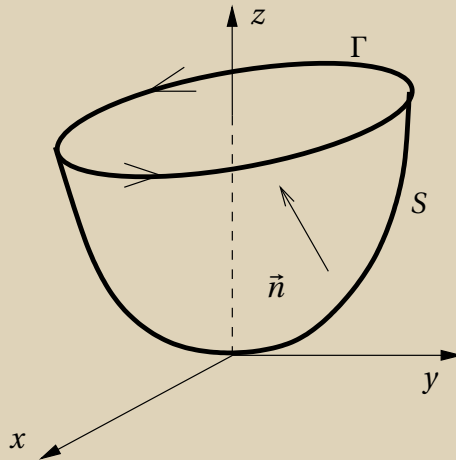
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow 1$$

Le demi-cercle  $DA$  est paramétré par :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \cos \theta \\ z = 1 + \sin \theta \end{cases} \quad \theta: \pi \rightarrow 0$$

(c) La circulation vaut  $-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} + 1$ .

(d) On calcule  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} = \vec{V}$ , le flux de  $\vec{V}$  a déjà été calculé dans le chapitre précédent, on peut reprendre le résultat.



2. (a)

(b)

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = 1 \end{cases} \quad t : 0 \rightarrow 2\pi$$

(c) La circulation vaut :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (-\sin \theta)(\sin \theta - 1) + \cos \theta d\theta = -\frac{\pi}{2}$$

Entraînez-vous à calculer les intégrales trigonométriques le plus rapidement possible.

(d) On calcule  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} = \vec{V}$ , le flux de  $\vec{V}$  a déjà été calculé dans le chapitre précédent, reprendre le résultat.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.4

$$\operatorname{div} \vec{V} = 3, \quad \operatorname{vol}(\mathcal{B}) = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \text{d'où} \quad \iiint_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \vec{V} = 4\pi R^3$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{R} = R$$

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = R \operatorname{aire} S = 4\pi R^3$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.5

1. (a) On a

$$\operatorname{div} \vec{U}_3(M) = \frac{\partial V_3}{\partial z}(x, y, z).$$

(b) En utilisant l'expression de l'intégrale triple, on a :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial V_3}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_3} V_3(x, y, \phi(x, y)) - V_3(x, y, \varepsilon(x, y)) dx dy.$$

2. (a) On utilise la proposition VIII.0.2 pour montrer que

$$\Phi_{S^+}(\vec{U}_3) = \iint_{D_3} V_3(x, y, \phi(x, y)) dx dy$$

(b) On utilise la proposition VIII.0.2 pour montrer que

$$\Phi_{S^-}(\vec{U}_3) = \iint_{D_3} -V_3(x, y, \varepsilon(x, y)) dx dy$$

(c) On en déduit que

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{U}_3 dx dy dz = \Phi_S(\vec{U}_3).$$

[Retour à l'exercice ▲](#)



### Solution de l'exercice A.1.6

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dx dy dz = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz = \frac{q}{\epsilon_0}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.7

$\operatorname{div} \vec{V} = 0$ , donc l'intégrale est nulle.

Retrouvons ce résultat en calculant le flux de  $\vec{V}$  à travers la sphère  $S$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

Une paramétrisation de  $S$  est :

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \cos \phi \\ z = R \sin \phi \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta < 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}.$$

On a :  $\sigma(\theta, \phi) = R^2 \cos \phi$ .

Un vecteur normal est  $\vec{n} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$

On a donc

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{xz + xy + zy}{R} = R(\cos \theta \sin \phi \cos \phi + \cos^2 \phi \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \phi \sin \phi)$$

D'où :

$$\Phi_S(\vec{V}) = R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin \phi \cos \phi + \cos^2 \phi \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \phi \sin \phi) \cos \phi d\theta d\phi$$

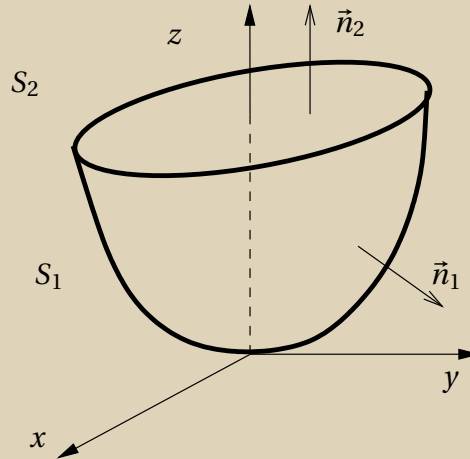
or

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0,$$

on retrouve bien que le flux de  $\vec{V}$  à travers  $S$  est nul.

[Retour à l'exercice ▲](#)

### Solution de l'exercice A.1.8



1.  $S$  se compose de 2 parties, un morceau de paraboloidé  $S_1$  que l'on a déjà étudié dans le chapitre précédent et un disque  $S_2$  qui se trouve dans le plan  $z = 1$ .
2. La normale à  $S_1$  doit être dirigée vers le bas, la normale à  $S_2$  doit être dirigée vers le haut.

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \\ \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La paramétrisation de  $S_1$  est :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad (x, y) \in D \text{ où } D \text{ est le disque de centre } O \text{ et de rayon } 1$$

La paramétrisation de  $S_2$  est :

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1 \end{cases} \quad (x, y) \in D$$

3. (a) Il faut calculer le flux à travers  $S_1$  et  $S_2$  correctement orientées.

$$\Phi_{S_2}(\vec{V}) = \iint_{S_2} \vec{V} \cdot \vec{n}_2 d\sigma = -\frac{1}{2} \text{ aire } S_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Pour le flux à travers  $S_1$ , on l'a déjà calculé dans le chapitre précédent. Est-ce la même orientation ?

- (b) Le flux est nul, c'est normal puisque  $\text{div } \vec{V} = 0$ .
4. (a)

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1}(\vec{V}) &= - \iint_D -2x(-x(x^2 + y^2)) - 2xy + x^2(x^2 + y^2) dx dy = - \iint_D 3x^2(x^2 + y^2) dx dy = -\frac{\pi}{2} \\ \Phi_{S_2}(\vec{V}) &= + \iint_D x^2 dx dy = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On a calculé les deux intégrales sur  $D$  en utilisant les coordonnées polaires.

- (b)  $\text{div } \vec{V} = -z + x^2$

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{V} dx dy dz &= \iint_D \left( \int_{x^2+y^2}^1 -z + x^2 dz \right) dx dy \\ &= \iint_D x^2 - x^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 dx dy - \frac{1}{2} \text{ aire } D \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On a calculé cette intégrale en utilisant les coordonnées polaires.

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.9

$\vec{n}$  est un vecteur constant puisque  $S$  est plane, donc

$$\vec{F} = p \left( \iint_S d\sigma \right) \vec{n} = pA\vec{n}$$

où  $A$  est l'aire de  $S$ .

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.1.10

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0, \operatorname{div} \vec{v}_2 = 0, \operatorname{div} \vec{v}_3 = \rho g$$

Les deux premières intégrales sont donc nulles.

$$\iint_S \vec{v}_3 \cdot \vec{n} d\sigma = \rho g \iiint_V dx dy dz = \rho g \operatorname{vol}(V)$$

[Retour à l'exercice ▲](#)

## Solution de l'exercice A.2.1

(questions 1. à 4. uniquement)

1. On utilise le théorème de Gauss-Ostrograski.

$$\operatorname{div} \vec{V} = 2(x + y + z)$$

$\mathcal{S}$  est le bord du volume  $\mathcal{V}$ , mais  $\mathcal{S}$  est orientée par la normale intérieure (opposée à celle requise par le théorème de G-O) donc le flux cherché est :

$$\phi = - \int \int \int_{\mathcal{V}} 2(x + y + z) dx dy dz$$

On calcule cette intégrale triple par la méthode des bâtonnets selon  $z$  (mais on peut faire autrement...).

La projection de  $\mathcal{V}$  sur  $z = 0$  est le triangle  $\Delta$  d'équation :

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \leq 1 \\ x - 2y \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \phi &= -2 \int \int_{\Delta} \left( \int_0^{-x/2+y} (x + y + z) dz \right) dx dy \\ &= -2 \int \int_{\Delta} \left[ xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{-x}{2}+y} dx dy \\ &= -2 \int \int_{\Delta} \left[ \frac{-x^2}{2} + xy - \frac{xy}{2} + y^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{4} + y^2 - xy \right) \right] dx dy \\ &= -2 \int \int_{\Delta} \frac{-3x^2}{8} + \frac{3y^2}{2} dx dy \end{aligned}$$



puis l'intégrale double par Fubini :

$$\begin{aligned}\phi &= -2 \int_0^1 \left( \int_0^{2y} \left( \frac{-3x^2}{8} + \frac{3y^2}{2} \right) dx \right) dy \\ &= -2 \int_0^1 \left[ \frac{-x^3}{8} + \frac{3xy^2}{2} \right]_0^{2y} dy \\ &= -2 \int_0^1 \underbrace{(-y^3 + 3y^3)}_{=2y^3} dy \\ &= -2 \left[ \frac{y^4}{2} \right]_0^1 \\ &= -1\end{aligned}$$

2. On utilise encore le théorème de G-O.

$$\operatorname{div} \vec{V} = 2$$

La normale choisie pour  $\Sigma$  étant celle dirigée vers l'extérieur, le flux cherché est égal à :

$$\phi = \int \int \int_{\mathcal{V}} 2 \, dx dy dz$$

$\mathcal{V}$  étant la boucle de rayon  $R$ , son volume est  $\frac{4}{3}\pi R^3$ . D'où  $\phi = \frac{8}{3}\pi R^3$ .

3. On applique le théorème de Stokes-Ampère.

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Paramétrons  $\Sigma$ . Comme  $x^2 + y^2 = R^2$ , on peut poser

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

$y \geq 0$  impose  $\theta \in [0, \pi[$ . Un paramétrage de  $\Sigma$  est donc :

$$\begin{aligned} \phi : [0, \pi[ \times [h_1, h_2] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, z) &\longmapsto \begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial z} = \begin{vmatrix} -R \sin \theta & 0 \\ R \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

L'orientation de cette normale (pas unitaire ici) impose le sens de la circulation (faire une figure).

$$\begin{aligned} \iint \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} dS &= \int_0^\pi \int_{h_1}^{h_2} (R \cos \theta + R \sin \theta) dz d\theta \\ &= R(h_2 - h_1) \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= R(h_2 - h_1) [\sin \theta - \cos \theta]_0^\pi \\ &= 2R(h_2 - h_1) \end{aligned}$$

Ce qui montre que la circulation avait été initialement calculée dans ce sens.

4. On va “vérifier” le théorème de Stokes Ampère.

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{V} d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

dans ce cas particulier.

(a) Calcul de  $\int_{\partial\Sigma} \vec{V} d\vec{l}$

$\partial\Sigma$  a pour équation :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z + 2y = 3 \end{cases}$$

Soit encore

$$\begin{cases} z = 3 - 2y \\ x^2 + \underbrace{y^2 + 2y}_{(y+1)^2 - 1} = 3 \end{cases}$$

D'où le paramétrage possible par  $\partial\Sigma$  :

$$\begin{aligned} T : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\longmapsto \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = -1 + 2 \sin \theta \\ z = 5 - 4 \sin \theta \end{cases} \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \vec{V} d\vec{l} &= \int_0^{2\pi} -2 \sin \theta d\theta + \frac{(2 \cos \theta)^3}{3} 2 \cos \theta d\theta - 4 \cos \theta d\theta \\ &= \frac{16}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \end{aligned}$$

Linéarisons :

$$\begin{aligned}
\cos^4 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 \\
&= \frac{e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-i4\theta}}{16} \\
&= \frac{\cos 4\theta}{8} + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_{\partial\Sigma} \vec{V} d\vec{l} = 4\pi$$

où le sens de circulation est celui de :

$$T'(\theta) = \begin{vmatrix} -2 \sin \theta \\ 2 \cos \theta \\ -4 \cos \theta \end{vmatrix}$$

(b) calcul de  $\iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{V} \vec{n} dS$  :

$$\text{rot} \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{x^3}{3} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{vmatrix}$$

Pour paramétrer  $\Sigma$  on utilise la même manipulation qu'au a).

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z + 2y \leq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + (y+1)^2 \leq 4 \end{cases}$$

D'où le paramétrage :

$$\begin{aligned} \phi : [0, 2] \times [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\longmapsto \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = -1 + r \sin \theta \\ z = \underbrace{r^2 \cos^2 \theta + (-1 + r \sin \theta)^2}_{1+r^2-2r \sin \theta} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \wedge \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 2r - 2 \sin \theta \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ -2r \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2r^2 \cos \theta \\ 2r + 2r^2 \sin \theta \\ r \end{vmatrix}$$

La composante selon  $z$  est positive, l'orientation de cette normale (pas unitaire) est bien cohérente avec le sens de circulation choisi en a).

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{V} \vec{n} dS &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta \\ &= \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 \theta}_{\frac{\cos 2\theta + 1}{2}} d\theta \\ &= \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^2 \left[ \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

[Retour à l'exercice ▲](#)