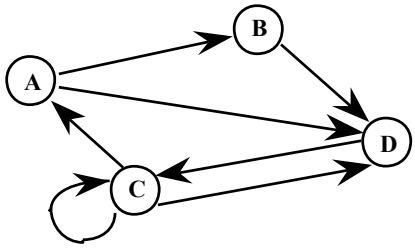
Exercice 1 :

Soit le graphe



1) Enumérer: U(A), U(B), $U^-(C)$, $U^+(D)$.

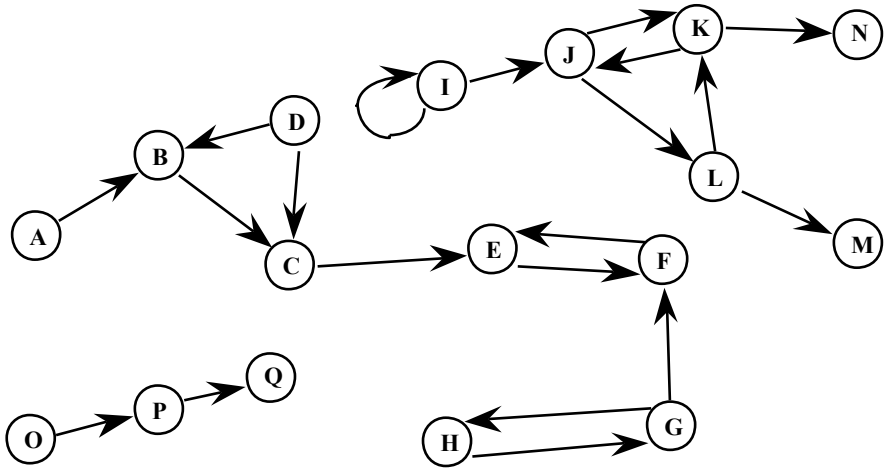
2) Calculer: $d^+(C)$, $d^-(C)$, d(C).

3) Rapporter un chemin simple mais pas élémentaire.

4) Rapporter un circuit Hamiltonien.

Exercice 2 :

On considère le graphe G=(X,U) ci-dessous. Rapporter des chaînes de B à G de longueur 7, 8, 9, 10 et 11. Déterminer ses composantes connexes, ses composantes fortement connexes ainsi que le graphe réduit.



Exercice 3 :

Montrer le lemme de KOENIG : on peut toujours extraire d'un chemin allant de i à j ($i \neq j$) un chemin élémentaire allant de i à j. Généraliser au cas i=j, puis à une chaine et un cycle.

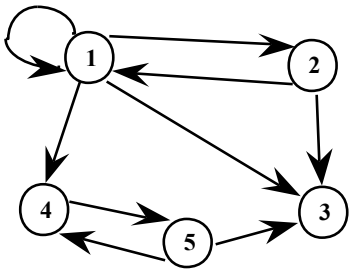
Exercice 4 :

Quelles méthodes proposez-vous pour coder un graphe en machine ?

Exercice 5

On propose deux méthodes pour coder un graphe G=(X,U) en machine : la matrice d'adjacence A et la file des successeurs de tableaux ALPHA1, ALPHA2 et BETA. La matrice associée est définie par A=(a_{ij}) avec a_{ij}=1 si l'arc (i,j) appartient à U et a_{ij} =0, sinon. La file des successeurs BETA est le tableau des successeurs, les successeurs du sommet I se trouvant entre les adresses ALPHA1(I) et ALPHA2(I) dans le tableau BETA, (en cours on avait un seul tableau ALPHA).

Rapporter les tableaux A, ALPHA1, ALPHA2 et BETA pour le graphe ci-dessous.



Ecrire un algorithme permettant de passer de la file des successeurs à la matrice associée. Quelle est la complexité de cet algorithme?

Ecrire un algorithme permettant de passer de la matrice associée à la file des successeurs. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

remarque:

On a en fait deux matrices associées car les valeurs peuvent être entières ou booléennes.

Exercice 6 :

Donner le nombre d'arêtes d'un graphe non orienté complet sans boucle de n sommets.

Exercice 7 :

Expliquer pourquoi si G=(X,E) est un graphe non orienté sans boucle, la somme des degrés est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.

Correction exercice 5 :

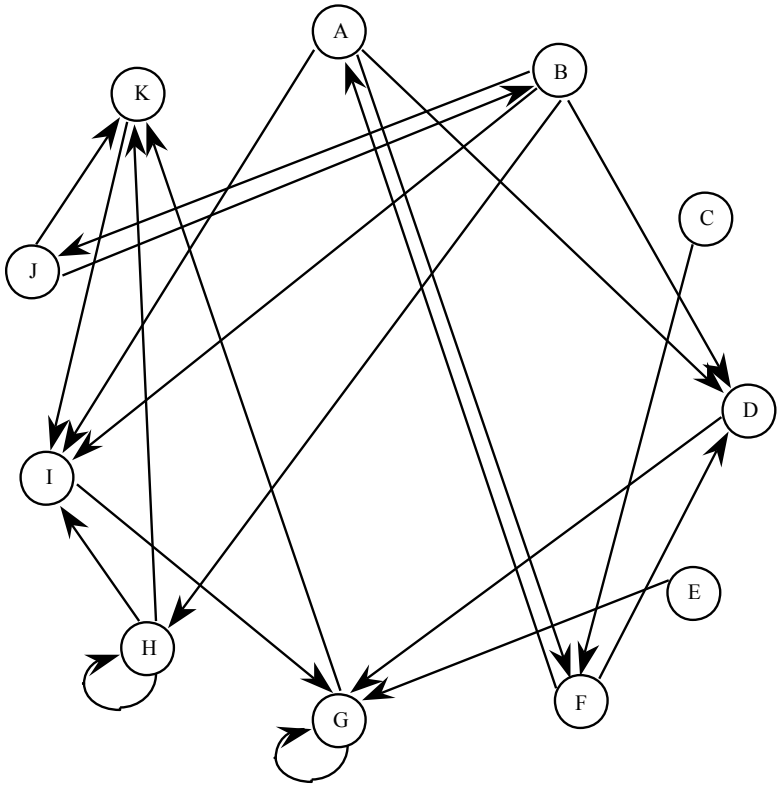
```
{ file des successeurs vers matrice d'adjacence }
for i := 1 to N do
for j := 1 to N do
A[i,j] := 0;
for i := 1 to N do
begin
j1 := ALPHA1[i];
j2 := ALPHA2[i];
if ( j1 <> 0 ) then
    begin
        for j := j1 to j2 do
            A[i, BETA[j]] := 1;
    end;
end;

{ matrice d'adjacence vers file des successeurs }

indi := 1;
for i :=1 to N do
begin
    j1 := 0;
    j2 := 0;
    for j := 1to N do
        if A[i,j] = 1 then
            begin
                if j1 = 0 then j1 := indi;
                BETA[indi] := j;
                j2 := indi;
                indi := indi + 1;
            end;
    ALPHA1[i] := j1;
    ALPHA2[i] := j2;
end;
```

Fermeture transitive d'un graphe G=(X,U) orienté et composantes fortement connexes.

On considère le graphe suivant :



Définition 1 : Soit i un sommet de G. On appelle fermeture transitive directe de i, l'ensemble des sommets j de G tels que : (i=j) ou (il existe un chemin de i à j), j est alors un descendant de i.

Question 0 : rapporter la matrice associée à ce graphe.

Question 1: détermination des successeurs d'un sommet

On note $\Gamma(i)$ l'ensemble des successeurs du sommet i. Ecrire les successeurs des sommets du graphe ci-dessus.

Quelle est la complexité de la recherche des successeurs d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

Question 2 : calcul des descendants d'un sommet

On note $\Gamma'(i)$ l'ensemble des descendants de i (i est considéré comme descendant d'ordre 0 de lui même), et $\Gamma^k(i) = \Gamma(\Gamma^{k-1}(i))$ l'ensemble des successeurs de i à l'ordre k.

Montrer que : $\Gamma'(i) = \{i\} + \Gamma(i) + \Gamma^2(i) + \Gamma^3(i) + ... + \Gamma^{n-1}(i)$.

On suppose que le graphe est codé par la matrice associée. Ecrire les descendants du sommet A du graphe ci-dessus ?

Quelle est la complexité, en utilisant cette méthode, de la recherche des descendants d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

Question 3 : calcul des descendants d'un sommet

Soit j un descendant de i. On dit que j est à distance k de i si k est la longueur du plus court chemin entre i et j, on va dire que j appartient à $D^k(i)$.

Montrer que : $\Gamma'(i) = \{i\} + D^1(i) + D^2(i) + \ldots + D^k(i) + \ldots + D^{n-1}(i)$.

Procedure "Descendants de (i)"

Début

$D^0(i) = \{i\}, \Gamma'(i) = \{i\}$;

Pour k = 1 à n-1 faire

$D^k(i) = \Gamma(D^{k-1}(i)) - \Gamma'(i)$;

$\Gamma'(i) = \Gamma'(i) + D^k(i)$;

Fin pour;

Fin.

Quelle est la complexité, en utilisant cette méthode, de la recherche des descendants d'un sommet si le graphe est codé par la matrice associée ?

Définition 2 : On appelle fermeture transitive inverse de i, l'ensemble des sommets j de G tels que (i=j) ou (il existe un chemin de j à i) j est alors un ascendant de i.

Question 4 : Détermination des prédécesseurs d'un sommet

On note $\Gamma^{-1}(i)$ l'ensemble des prédécesseurs du sommet i.

Ecrire les prédécesseurs des sommets du graphe ci-dessus.

Question 5 : Détermination des ascendants d'un sommet

Proposer une méthode analogue à la précédente pour calculer les ascendants d'un sommet i. Quelle est sa complexité ?

Question 6 :

Que représente l'ensemble des sommets qui sont à la fois descendants et ascendants du sommet i ?

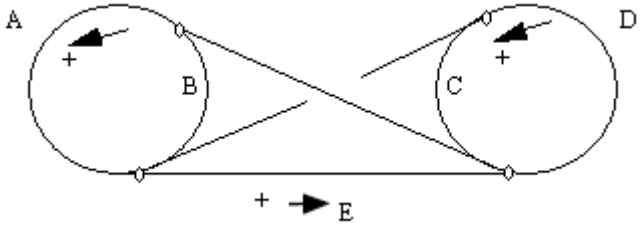
Question 7 :

Proposer un algorithme basé sur les questions précédentes pour chercher l'ensemble des composantes fortement connexes d'un graphe. Quelle est sa complexité (cette méthode s'appelle la méthode de MALGRANGE) ? Appliquer cette méthode à l'exemple précédent en utilisant la matrice écrite. On distinguera, en appliquant l'algorithme, les descendants (resp. ascendants) d'ordre 1, d'ordre 2, ... etc.

Question 8 :

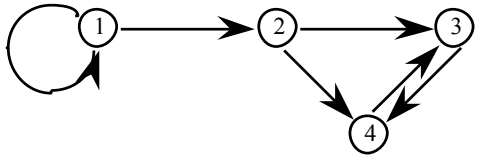
Dessiner le graphe réduit, le graphe initial est-il planaire ?

Exercice 1 : Soit un train électrique dont le circuit est le suivant :



Chaque aiguillage a 2 ou 3 positions. On a remarqué qu'au bout d'un certain temps, quel que soit l'état initial, le tronçon E n'est jamais emprunté par le train. Expliquer cela à l'aide d'un graphe à 10 sommets.

Exercice 2 : Soit G = (X,U), un graphe orienté et B la matrice d'adjacence sommet-sommet associée à G. On prendra comme exemple le graphe suivant :



2.0 : Calculer B, B^2, B^3, B^4, (I+B), $(I+B)^2$, $(I+B)^3$, $(I+B)^4$, pour l'exemple ci-dessus, où la matrice B est booléenne (on utilisera les opérations booléennes).

On se place maintenant dans le cas général.

2.1 : Si B^k est le produit matriciel Booléen de B par B^{k-1}, montrer que:

$\{B^k\}_{ij}$ = 1 s'il existe un chemin de k arcs entre i et j et 0 sinon.

2.2 : On pose :

$$\overset{\vee}{B}_k = I + B + B^2 + \ldots\ldots + B^k.$$

Montrer que :

$\{\overset{\vee}{B}_k\}_{ij}$ = 1 s'il existe un chemin de k arcs au plus entre i et j et 0 sinon.

Montrer que l'on peut définir $\overset{\vee}{B} = \lim \overset{\vee}{B}_k$ pour k tend vers ∞.

2.3 : On pose de même $\overset{\vee}{C}_k = I + C + C^2 + \ldots\ldots + C^k$ où $C = B^T$. Montrer que la limite $\overset{\vee}{C}$ existe et que :

$\{\overset{\vee}{C}\}_{ij}$ = 1 s'il existe un chemin entre j et i et 0 sinon.

2.4 : Déduire de ce qui précède une méthode pour décomposer G en composantes fortement connexes. Evaluer la complexité de cette méthode après avoir rappelé la complexité de la multiplication de deux matrices carrées.

2.5 : Proposer une méthode pour chercher les composantes connexes du graphe en transformant le graphe de départ.

2.6 : On se propose d'améliorer cette méthode.

Démontrer l'identité $(I+B)^k = I + B + B^2 + ... + B^k$.

Montrer que la suite $\{B(1) = I+B,\ B(k)=(B(k-1))^2$ pour $k>1\}$ converge vers B' en un nombre fini d'étapes que l'on évaluera.

En déduire un meilleur algorithme que celui obtenu en 2.4. On en précisera l'ordre.

2.7 : Que se passe-t-il si l'on remplace le produit Booléen par le produit usuel ?

Exercice 3 :

Un graphe dont tous les sommets sont de même degré est dit régulier. Quelles sont les graphes non orientés réguliers de degré 1 ? de degré 2 ?

Exercice 4 : Combien y a-t-il des graphes orientés à quatre sommets ?

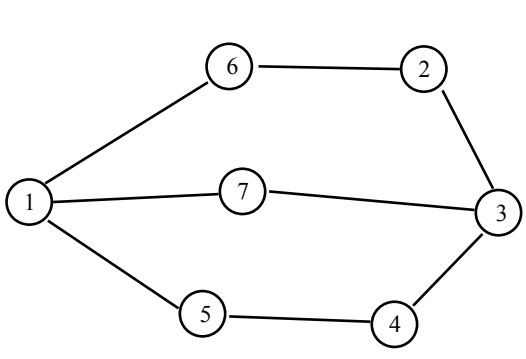
Problème Graphe Biparti et bicoloration:

On rappelle qu'un graphe G=(X,U) est biparti si toutes ses arêtes ont une extrémité dans un sous-ensemble X_1 et l'autre extrémité dans $X-X_1$. L'algorithme BIPAR(G) a pour objet de tester si un graphe G connexe est biparti.

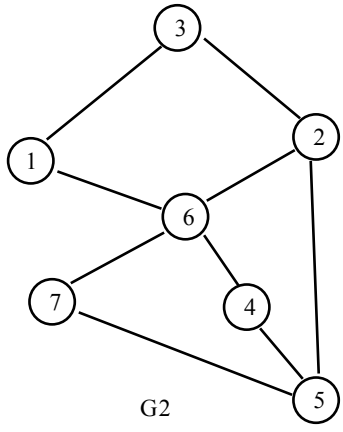
Algorithme BIPAR(G) :

```
{-1- Initialisations}
Lire un graphe connexe G=(X,U); {initialement aucun sommet n'est coloré}
colorer le sommet 1 en rouge;
initialiser le booléen BIPARTI à VRAI.

{-2- Examen des sommets colorés}
Tant qu'il existe un sommet i coloré et non examiné faire
Début
    Si i est rouge alors
        pour chaque voisin j de i faire
            Début
                si j est rouge alors BIPARTI=FAUX
                si j est non coloré alors colorer j en vert
            Fin
    sinon { i est vert alors }
        pour chaque voisin j de i faire
            Début
                si j est  vert alors BIPARTI=FAUX
                si j est non coloré alors colorer j en rouge
            Fin
Fin
{-3- Sortie de l'algorithme}
Si BIPARTI = VRAI alors écrire "G est biparti", sinon écrire "G n'est pas biparti"..
```



G1



G2

Question 1: Faire tourner l'algorithme sur les graphes G_1 et G_2. On rapportera les couleurs pour chaque itération de la boucle.

Question 2: On code le graphe G=(X,U) par la matrice A associée, c'est-à-dire : si (i,j) est une arête du graphe alors $a_{ij} = a_{ji} = 1$, sinon $a_{ij} = 0$.

(a) Quels tableaux supplémentaires sont-ils nécessaires pour BIPAR(G) ?

(b) Quelle est la complexité résultante de l'algorithme ? Justifier.

Question 3: Proposer de façon explicite une meilleure structure de données. Que devient la complexité ? Justifier.

Question 4: (Cette question est indépendante de l'algorithme)

Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il est bicolorable.

Question 5: (Cette question est indépendante de l'algorithme)

Montrer qu'un graphe biparti ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Question 6: Quelles sont les propriétés des sommets colorés en rouge et en vert au cours de l'algorithme? Justifier. Où intervient la connexité ?

Question 7: Montrer la validité de l'algorithme. En déduire la réciproque de la question 5 dans le cas connexe.

Question 8: Comment proposez-vous de modifier l'algorithme pour tester si un graphe quelconque, c'est-à-dire non nécessairement connexe est biparti?

Question 9: Le problème de coloration minimale d'un graphe quelconque est NP-difficile. Existe-il un algorithme de complexité polynomiale permettant de le résoudre ?

Exercice 1 :

Montrez qu'un graphe est un arbre si et seulement si il existe une chaîne élémentaire et une seule entre chaque paire de sommets.

Exercice 2 :

Soit G un graphe non orienté à n sommets et m arêtes. Les arêtes de G sont notées u_1, u_2 .. u_m. $G_i = (V, E_i)$, est le graphe formé des arêtes u_1, u_2 .. u_i. On pose $G_0 = (V, \Phi)$.

Question 1. Quel est le nombre de composantes connexes de G_0.

Question 2. On note $C(G_i)$ le nombre de composantes connexes de G_i. Montrer que

$C(G_i) = C(G_{i-1})$ ou $C(G_i) = C(G_{i-1}) - 1$.

Question 3. Interpréter le cas $C(G_i) = C(G_{i-1})$, puis le cas $C(G_i) = C(G_{i-1}) - 1$.

Question 4. Montrer qu'un graphe connexe a au moins n-1 arêtes.

Question 5. Montrer qu'un graphe sans cycle a au plus n-1 arêtes.

Recherche en profondeur d'abord dans un graphe

L'algorithme ci-dessous permet de déterminer avec une faible complexité les descendants d'un sommet i_0. Initialement n(i) est le nombre de successeurs de i. On initialise également p(i)=0 pour i différent de i_0 et $p(i_0)=i_0$.

Au cours de l'exploration, on associe à chaque sommet i, un nombre $p(i) \in [0,n]$ et on dit que **le sommet i est atteint** quand p(i) est strictement positif (p(i) est alors le sommet ayant permis d'atteindre le sommet i) et que le sommet i est **non atteint** si p(i) est nul.

Un sommet atteint se trouvera, par convention, dans l'un des deux états suivants : **ouvert**, quand n(i) est strictement positif, **fermé** quand n(i) est nul.

Algorithme :

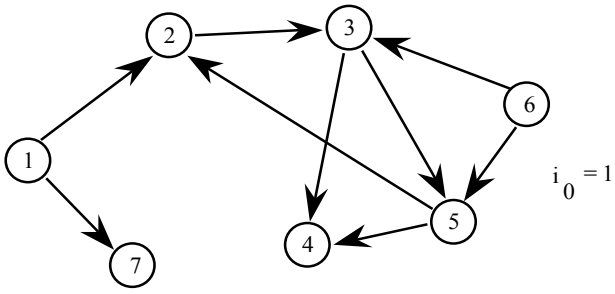
```
Début
   Pour i =1 à n faire {les sommets sont numérotés de 1 à n.}
      Début
         p(i) := 0;
         n(i) := d+(i);
      Fin
   p(i0) := i0;
   i := i0;
   Tant que (n(i0) + ABS(i-i0)) > 0 faire /*ABS(x) est la valeur absolue de x */
      Début
         Si n(i) différent de 0 alors {le sommet  i est ouvert}
            Début
               Sélectionner parmi les successeurs de i le sommet j venant en position n(i)
               n(i) := n(i)-1;
               Si p(j)=0 alors {le sommet j est non atteint}
                  Début
                     p(j) := i; {le sommet j devient atteint}
                     i := j;
                  Fin
            Fin
         sinon {le sommet i est fermé car on a examiné tous ses successeurs}
            i := p(i)
      Fin
Fin
```

Première partie: étude de l'algorithme

Question 1 : On admettra provisoirement que la restriction de la fonction p à $X-i_0-\{i/p(i)=0\}$ définit une arborescence partielle de racine i_0 à tout instant de l'algorithme. Si p(i) est différent de 0, p(i) est le père de i. Rappelons qu'une telle fonction père définit une arborescence si le graphe associé à sa restriction est connexe.

On demande de faire tourner l'algorithme sur le graphe ci-dessous en traçant autant d'arborescences obtenues en cours d'algorithme que d'exécutions de la boucle tant que avec les conventions suivantes :

- initialement, l'arborescence est réduite à sa racine $i_0 = 1$;
- quand on sélectionne un sommet j avec p(j)=0, on ajoute l'arc "plein" (i,j) à l'arborescence;
- quand on ferme le sommet i, on met en pointillé ou en rouge l'arc (p(i),i).



Question 2 : Expliquer intuitivement ce que l'on fait dans la boucle Tant Que. Interpréter le test : $(n(i_0) + ABS(i-i_0)) > 0$.

Question 3

A quoi correspondent dans la boucle Tant que les cas n(i) différent de 0 et n(i) égal 0 ?

Question 4

Combien de fois exécute-t-on la boucle Tant que pour l'exemple ci-dessus ? Combien de fois au pire dans le cas général ? Pour le démontrer on distinguera les cas n(i) différent de 0 et n(i) = 0.

Deuxième partie : preuve de l'algorithme.

Question 1: Montrer qu'en cours d'algorithme on construit une arborescence de racine i_0.

Question 2: Montrer que la restriction de cette arborescence aux arcs pleins est une arborescence, réduite à un chemin, dont i est le sommet pendant (cette arborescence est dite arborescence courante) et i_0 le sommet initial.

Question 3: Montrer que tout sommet atteint est descendant de i_0.

Question 4: A quelle condition un sommet est-il retiré de l'arborescence courante ?

Question 5: Que devient l'arborescence courante à la fin de l'algorithme ?

Question 6: Montrer en utilisant le fait que les n(i) décroissent en restant positifs ou nuls, et que l'algorithme ne se bloque jamais en distinguant les cas $i=i_0$ et $i \neq i_0$. Déduire que l'algorithme se termine.

Question 7: Montrer que tout sommet descendant de i_0 est atteint à la fin de l'algorithme.

Question 8 : Montrer que l'algorithme détermine les descendants de i_0.

Troisième partie : complexité de l'algorithme

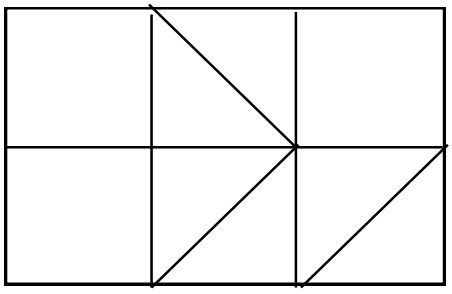
Question 1: Quel codage du graphe proposez-vous?

Question 2: Evaluer la complexité globale de l'algorithme en justifiant votre réponse.

Quatrième partie: extensions.

On a donc démontré que cet algorithme permet de déterminer les descendants d'un sommet i_0. Quelle méthode proposez-vous pour déterminer les composantes connexes d'un graphe? Ecrire un tel algorithme utilisant comme sous-programme l'algorithme précédent. Evaluer sa complexité.

Exercice 1 : Déterminer une chaîne eulérienne dans le graphe suivant :



Exercice 2 : Méthode arborescente :

Cinq personnes de nationalités différentes habitent les cinq premières maisons d'une rue, toutes sur le même trottoir (numérotées de 1 à 5).

Elles exercent cinq professions différentes et ont chacune une boisson et un animal favori tous différents. Les cinq habitations sont de cinq couleurs différentes.

1 : L'anglais habite la maison rouge.
2 : L'espagnol possède un chien.
3 : Le japonais est peintre.
4 : L'italien boit du thé.
5 : Le norvégien habite la première maison à gauche.
6 : Le propriétaire de la maison verte boit du café.
7 : Cette maison verte est immédiatement à droite de la blanche.
8 : Le sculpteur élève des escargots.
9 : Le diplomate habite la maison jaune.
10 : On boit du lait dans la maison du milieu.
11 : Le norvégien habite à coté de la maison bleue.
12 : Le violoniste boit des jus de fruits.
13 : Le renard est dans une maison voisine du médecin.
14 : Le cheval, à côté de celle du diplomate.

Qui élève le zèbre et qui boit de l'eau ?
(Attribué à Lewis Carrol)

Exercice 3 :

Résoudre le problème de décodage suivant :

```
  F O R T Y
+     T E N
+     T E N
-------------
  S I X T Y
```

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que F, T et S ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

Exercice1: On se propose de résoudre le problème de décodage suivant :

```
  S E N D
+ M O R E
---------
M O N E Y
```

Sachant que les lettres représentent des chiffres distincts compris entre 0 et 9, et que M et S ne sont pas nuls, donner la solution à l'aide d'une arborescence et montrer son unicité.

Exercice 2: Méthode de Little :(extrait de ROSEAUX)

Un représentant de commerce doit se rendre de la ville A où il réside dans quatre autres villes pour visiter les magasins clients de la marque qu'il représente. Il désire passer une et une seule demi-journée chez chacun de ses clients et revenir à sa ville de départ A. La durée du trajet entre deux villes I et J est mesurée en demi-journées et dépend de la circulation routière dans le sens IJ et JI. Le tableau donnant ces durées n'est donc pas symétrique.

$T = (t_{ij}) =$

	A	B	C	D	E
A	∞	2	1	3	4
B	1	∞	6	5	7
C	4	3	∞	8	2
D	5	7	4	∞	1
E	2	3	5	2	∞

Calculer le trajet de durée minimale passant une et une seule fois par chaque ville.

PROBLEME: étude du noyau d'un graphe orienté.

Définition:

> Un sous-ensemble K de l'ensemble X des sommets d'un graphe orienté G=(X, U) est dit noyau de G si:
>
> 1. K est un stable de G, c'est-à-dire : aucun couple de sommets de K n'est lié par un arc.
>
> 2. tout sommet à l'extérieur de K est extrémité initiale d'un arc dont l'extrémité terminale est dans K

Discussion:

Certains graphes n'ont pas de noyau. D'autres graphes ont plusieurs noyaux. Le but principal de ce problème est de montrer qu'un graphe sans circuit a exactement un noyau et d'utiliser cette notion pour étudier des jeux.

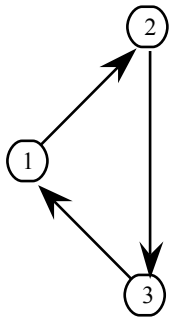
Question 0 : propriété caractéristique

Montrer que K est un noyau si et seulement si :

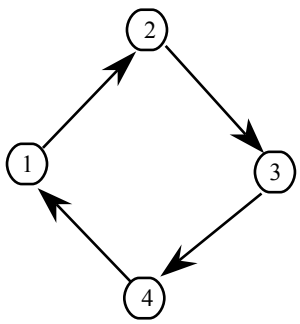
- tout sommet dans K a ses successeurs en dehors de K,
- tout sommet en dehors de K a au moins un de ses successeurs dans K.

Question 1: pour se familiariser avec la notion de noyau.

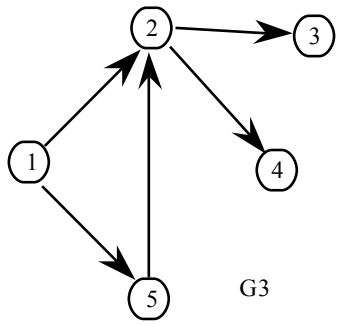
Déterminer tous les noyaux (s'il en existe) des graphes G_1, G_2 et G_3.



G1



G2



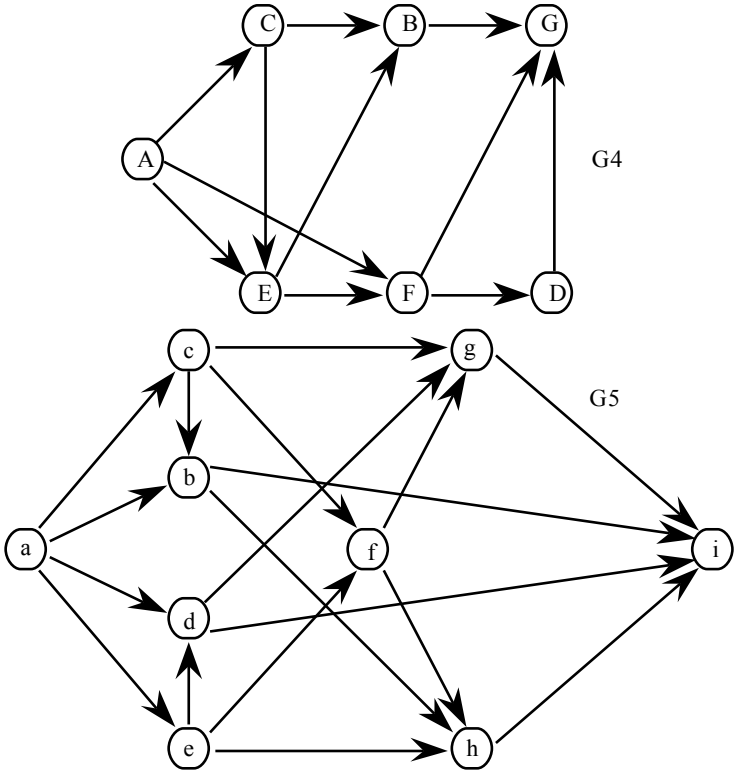
G3

Question 2: étude théorique des graphes sans circuit.

On se propose de montrer qu'un graphe sans circuit a exactement un noyau. Pour cela, on étudie l'algorithme NOYAU.

```
NOYAU
DEBUT
   Lire G=(X,U) un graphe orienté sans circuit;
   Initialement aucun sommet n'est coloré;
   Numéroter les sommets de G selon une numérotation inverse: si (i,j) ∈ U, alors i est strictement plus
   grand que j (en particulier, le sommet 1 est un sommet sans successeur);
   Colorer en rouge le sommet 1;
   Pour I:=2,N faire
   DEBUT
   Si un des successeurs de I est rouge, colorer I en vert
   Sinon colorer I en rouge
   FIN
   Le noyau est l'ensemble des sommets rouges
FIN
```

A) Faire tourner l'algorithme sur les graphes G_4 et G_5 ci-dessous.
On rapportera les couleurs finales.

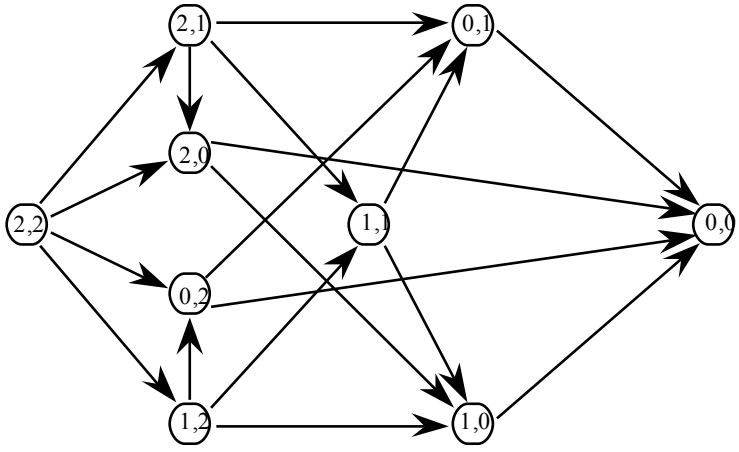


B) Montrer qu'en cours d'algorithme :
-tout sommet vert a au moins un successeur rouge ;
-tout sommet rouge n'a pas de successeur rouge.
En déduire que les sommets rouges forment un noyau de G.
C) Montrer que l'algorithme se termine et qu'alors tous les sommets sont colorés.
D) Montrer l'unicité du noyau.
E) Donner les tableaux principaux qui permettent de coder le plus efficacement cette procédure. On justifiera succinctement et on rapportera la complexité résultante de l'algorithme.

Question 3: application aux jeux

Dans le jeu de NIM, on a deux piles de jetons, chacun des joueurs joue chacun son tour et prend n'importe quel nombre de jetons de l'une des deux piles. **Le joueur qui prend le dernier jeton gagne, l'autre perd.** Ainsi la position (0,0) pour le joueur atteignant cette position est gagnante. Le jeu complet est décrit par un graphe orienté dont les sommets correspondent à l'état du jeu et les arcs aux "coups" des joueurs. Ici chaque état du jeu est décrit par une paire d'entiers (x,y) qui indique le nombre de jetons dans la première pile et la deuxième pile, respectivement.

Par exemple, si l'état initial de la pile est (2,2), le graphe du jeu est le suivant:



La question importante pour ce jeu est: quand un joueur est-il certain de gagner et comment doit-il jouer?

Nous allons d'abord tenter de répondre à cette question pour des piles de taille initiale 2, puis on généralisera.

Une position sera dite gagnante si le joueur venant d'atteindre cette position gagne quelle que soit la façon de jouer de son adversaire sous réserve que lui-même joue bien dans la suite du jeu (c'est donc à son adversaire de jouer).

Une position sera dite perdante si le joueur ayant atteint cette position va perdre si son adversaire joue bien.

A) Quelles sont les positions gagnantes pour le cas particulier? Quelles sont les positions perdantes? Si B commence, qui va gagner?

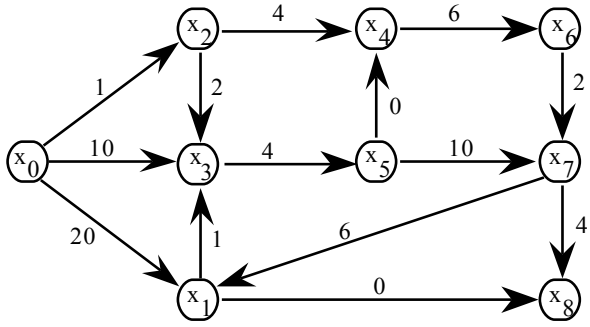
B) Pour un jeu de NIM en position de départ (k_1, k_2) et si B commence à jouer, à quelle condition sur k_1 et k_2, A va-t-il gagner ? Formuler en français une stratégie gagnante. Que pouvez-vous dire si on généralise à trois piles ?

C) Le jeu de NIM est un jeu à deux joueurs, sans hasard, avec information parfaite (chacun des joueurs connaît avant de jouer l'état du jeu), à espace d'états fini et dont le graphe d'états associé est sans circuit. Montrer, de façon générale, que si le graphe d'états d'un jeu à deux joueurs est sans circuit, fini, et a un seul état final gagnant pour celui qui l'atteint, et si les deux joueurs jouent parfaitement, on peut prédire à l'avance qui gagnera à l'aide de la notion de noyau. Justifier complètement.

D) Où se situe en général la difficulté pour un tel jeu ?

E) Pourquoi la méthode précédente ne s'applique pas même théoriquement au jeu d'échecs ou au jeu de dames ? Justifier votre réponse. Qu'y-a-t-il de différent ? Quelle idée cela vous donne pour ces jeux ?

Exercice



On cherche les valeurs des chemins minimaux issus de x_0.

Les algorithmes de DIJKSTRA et BELLMAN sont-ils applicables? Justifier.

Appliquer le ou les algorithmes utilisables.

On rapportera éventuellement les valeurs successives des λ_i (si DIJKSTRA est utilisable) et la numérotation si elle existe, ainsi qu'une arborescence de chemins minimaux issus de x_0. Y-a-t-il unicité des chemins minimaux? Justifier.

PROBLEME : ALGORITHME DE DIJKSTRA MODIFIE

On considère un graphe valué G=(X,U,v) où la valuation v est entière de signe quelconque et où 1 est racine de G. Nous allons étudier l'algorithme suivant:

Algorithme de DIJKSTRA modifié
Début
A) Application de l'algorithme de Dijkstra;
Debut
Poser S:={1}; λ_1 :=0; λ_i:=v(1,i) et père(i) = 1 si (1,i) $\in$ U et λ_i:= ∞ sinon;
Tant que S $\neq$ X faire
Début
Choisir i $\in$ X-S tel que λ_i soit minimal;
Poser S:=S U {i};
Pour j $\in$ (X-S) $\cap$ U^+(i) faire λ_j:=Min(λ_j ,λ_i+v(i,j)) et père(j) = i;
Fin; *{Attention : lisez bien cette partie de l'algorithme, j$\in$X-S}*
Fin;

B) Détermination de l'arborescence de racine 1 associée :
On rappelle que cette arborescence (définie par la fonction père()) est obtenue en retenant, pour chaque j, l'arc (i,j) ayant permis de fixer λ_j. Les arcs de cette arborescence A seront dits marqués.

C) Test des d_j :
Début
Chercher un arc (i,j) non marqué tel que λ_j-λ_i>v(i,j);
Si un tel arc n'existe pas alors FIN1;
Si un tel arc rajouté à l'arborescence crée un circuit alors FIN2;
Si un tel arc rajouté à l'arborescence crée un cycle qui n'est pas un circuit, aller en D) ;
Fin;

D) Modification de l'arborescence :

Début

Enlever de A l'arc marqué d'extrémité terminale j et ajouter à A l'arc(i,j) et poser père(j)=i;

Pour j et tous ses descendants dans A diminuer les λ de la quantité $\delta=\lambda_j-\lambda_i-v(i,j)$;

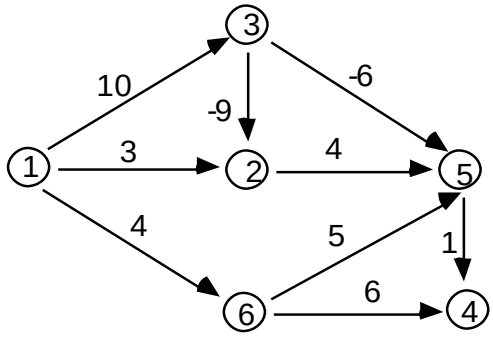
Aller en C);

Fin;

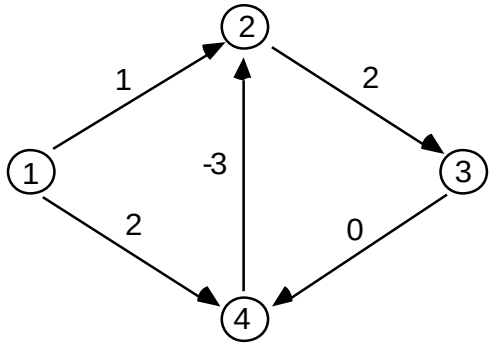
Fin.

QUESTIONS

1) Appliquer l'algorithme au graphe G_1 ci-dessous.



2) Appliquer l'algorithme au graphe G_2 ci-dessous.



3) On rappelle qu'une arborescence de racine 1 peut être définie par une fonction père de X-{1} -> X, telle que 1 soit ascendant de tous les sommets. On admettra qu'à la fin de A) : tous les sommets ont un potentiel fini, et que l'ensemble des arcs ayant permis de fixer le potentiel, donc satisfaisant $\lambda_j-\lambda_i= v(i,j)$, définissent une arborescence de racine 1. Montrer que l'arborescence A a la propriété suivante : " λ_i *est la valeur du chemin de l'arborescence A allant de 1 à i* ".

4) Montrer qu'à chaque fois qu'on passe par D), on redéfinit une nouvelle arborescence de racine 1 ayant les mêmes propriétés.

5) Expliciter FIN2.

6) Montrer qu'en l'absence de circuit absorbant, l'algorithme se termine en FIN1 après un nombre fini d'étapes et qu'alors λ_i est la valeur minimale d'un chemin allant de 1 à i. En déduire sa validité. Est-il polynomial ? Et s'il y avait des circuits absorbants ?

Exercice 1 : ORDONNANCEMENT

Un projet comporte sept tâches a,b,c,d,e,f,g. Pour chaque tâche, le tableau ci-dessous rapporte sa durée et les tâches préalables.

1) Dessiner le graphe potentiel-tâches et calculer les dates au plus tôt, les dates au plus tard et le chemin critique.

2) Dessiner un graphe PERT simplifié avec un minimum d'arcs fictifs.

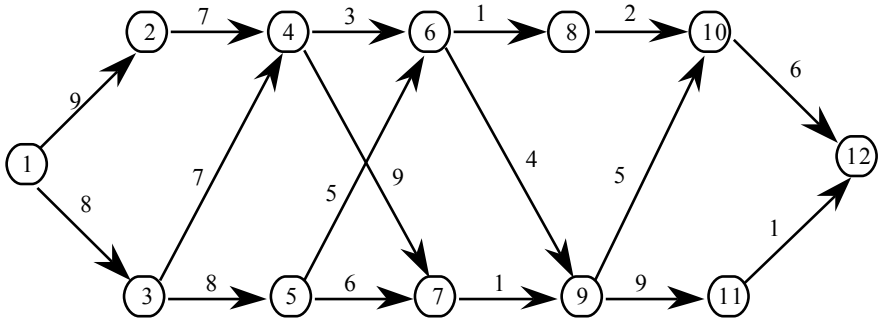
tâches	durées	tâches préalables
a	4	
b	3	
c	6	a et b
d	2	b
e	8	
f	7	c, d et e
g	1	c

Exercice 2 : L'itinéraire de Michel STROGOFF (d'après ROSEAUX)

Partant de MOSCOU, Michel STROGOFF, courrier du tsar, devait rejoindre IRKOUTSK. Avant de partir, il avait consulté une voyante qui lui avait dit entre autres choses:

"après KAZAN méfiez-vous du ciel, à OMSK attention aux tartares, dans TOMSK attention aux yeux, après TOMSK méfiez-vous de l'eau et, surtout prenez garde partout à un grand brun avec des bottes noires".

STROGOFF avait alors reporté sur une carte pour chaque liaison entre deux villes ses "chances" de réussite : ces chances étaient exprimées par un nombre compris entre 1 et 10 (mesurant le nombre de chances sur 10 de succès). Ignorant le calcul des probabilités, il avait alors choisi son itinéraire en maximisant la somme globale des chances.



Les numéros des villes sont les suivants: MOSCOU(1), KAZAN(2), PENZA(3), PERM(4), OUFA(5), TOBOLSK(6), NOVO-SAIMSK(7), TARA(8), OMSK(9), TOMSK(10), SEMIPALATINSK(11), IRKOUTSK(12).

1. Déterminer l'itinéraire de Michel STROGOFF.

2. Quelle était alors sous l'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires "chances de succès", la probabilité pour que STROGOFF réussisse?

3. Quel aurait été son itinéraire s'il avait connu les principes du calcul des probabilités?

Exercice 3 : UN PROBLEME D'INVESTISSEMENT

1)Un exemple.

On dispose de 6 millions à investir dans 3 régions. Le tableau suivant donne les bénéfices résultant des sommes investies.

Déterminer la politique d'investissement optimale entre les trois régions à l'aide d'une méthode de "programmation dynamique". L'idée est d'associer à la donnée un graphe en niveaux. Le niveau 0 ne contient que le sommet (0,0), (car aucune somme n'a encore été investie). Le niveau 1 contient les sommets (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), qui correspondent aux sommes investies dans la région 1. Le niveau i contient les sommets (i,0), (i,1), (i,2), (i,3), (i,4), (i,5), (i,6), qui correspondent aux sommes investies dans les régions 1..i, (i = 2, 3). On introduit les arcs entre les niveaux i et i+1, valués par les sommes investies dans la région i+1. Le dernier sommet est (3,6). Il s'agit de chercher un chemin de valeur maximale dans ce graphe.

	Région I	Région II	Région III
1 million	0,2	0,1	0,4
2 millions	0,5	0,2	0,5
3 millions	0,9	0,8	0,6
4 millions	1	1	0,7

2)Le cas général.

Plus généralement on dispose de *B* millions à investir dans *n* régions. On pose $f_i(y)$ le bénéfice optimal pour un investissement cumulé d'une somme y dans les régions 1, 2, .., i. On a $f_0(0)= 0$. Donner une formule de récurrence reliant f_i à f_{i-1} pour i de 1 à n.

Quelle est en fonction de *n* et de *B* la complexité de la méthode de programmation dynamique ?

Quelle est la complexité d'énumération de toutes les solutions possibles ?

LE PROBLEME DU SAC A DOS (d'après ROSEAUX)

Un randonneur, partant pour une longue excursion, détermine avec soin le contenu de son sac à dos. Compte tenu des équipements indispensables déjà chargés, le poids total de nourriture emportée ne devra pas excéder 16 kilogrammes. Il dispose, en quantités limitées, de trois types d'aliments, de valeurs nutritives variables, dont les poids unitaires sont différents. Les aliments sont conditionnés par unités non fractionnables.

Aliments	I	II	III
poids unitaires en kilo	7	5	2
quantités disponibles	4	3	4
valeurs nutritives	15	10	4

Le randonneur choisit la quantité de chaque aliment à emporter, de façon à maximiser la valeur nutritive totale, tout en tenant compte de la limite de 16 Kg qu'il s'est fixée.

Il va utiliser la "programmation dynamique" pour résoudre ce problème dit du "Knapsack" ou sac à dos. D'une manière générale, soit :

n, le nombre d'aliments différents;

p_i le poids unitaire de l'aliment i ($i \in [1,n]$);

q_i le nombre d'unités disponibles de l'aliment i ($i \in [1,n]$);

c_i la valeur nutritive de l'aliment i ($i \in [1,n]$);

x_i la quantité de l'aliment i emportée en nombre d'unités ($i \in [1,n]$) (ce sont les inconnues);

et P le poids maximal de nourriture qu'il peut emporter.

1) Donner une formalisation du problème en tant que programme linéaire en nombre entiers.

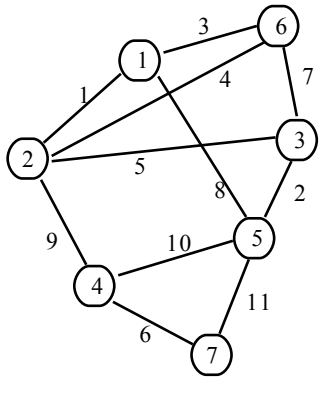
2) Tracer le graphe des décisions associé au problème, construit de façon analogue à l'exercice de TD précédent sur le problème de l'investissement.

3) Résoudre numériquement.

4) En notant $f_i(Q)$ la valeur nutritive maximale du sac à dos chargé optimalement avec uniquement les i premiers produits, et de poids total Q (Q inférieur ou égal à P). Donner les formules d'optimisation séquentielle, c'est-à-dire des formules reliant la fonction f_i à la fonction f_{i-1}.

5) Evaluer la complexité de la méthode en fonction de n et de P et expliquer son intérêt en la comparant à une méthode énumérative.

PROBLEME: ALGORITHME DE KRUSKAL:



L'algorithme de KRUSKAL permet de déterminer un arbre couvrant de coût minimal d'un graphe valué **connexe** G=(X,U, V) à N sommets et M arêtes. **Il consiste à partir d'un graphe réduit à ses sommets isolés, puis à ajouter pas à pas les arêtes en coûts croissants sous réserve que l'arête ajoutée ne crée pas de cycle.**

On supposera que les coûts sont tous distincts.

KRUSKAL

{par convention l'arête e_L s'écrira e_L =[I,J] avec I strictement plus petit que J}

```
Début
    Indicer les arêtes en ordre de coûts croissants: v(e1) ≤ v(e2) ≤ ... ≤v(eM)
    Pour H:=1..N faire  CONNEXE(H):=H;
    K:=1; {le graphe partiel est initialement vide}
    Pour L:=1..M faire
      Début
          soit eL=[I,J];
          Si  (CONNEXE(I) différent de CONNEXE(J)) alors
          Début
            AUXI:=CONNEXE(J); fK:=[I,J]; { fK  est mis dans le graphe partiel}; K:=K+1;
            Pour H:=1..N faire
            Si (CONNEXE(H)=AUXI) alors CONNEXE(H):=CONNEXE(I)
          Fin
      Fin
Fin
```

Question 1: Faire tourner l'algorithme sur le graphe ci-dessus: on dessinera les graphes partiels successifs et les onze valeurs successives du tableau CONNEXE obtenu avant chaque itération de la boucle externe.

Question 2: Evaluer en fonction de N et M la complexité de l'algorithme. On pourra distinguer deux types d'itérations dans la grande boucle.

Question 3 (cette question est indépendante de l'algorithme)

On rappelle que l'on est dans le cas où tous les coûts sont distincts.

On va démontrer le théorème suivant :

« L'arbre de cout minimal d'un graph connexe existe et il est formé des arêtes de cout minimal des cocycles de G. »

a) Soit A un arbre couvrant de coût minimal et ω(Y) un cocycle de G. Montrer par l'absurde que A rencontre ω(Y) en son arête de coût minimal. Un arbre de coût minimal existe puisque le graphe est connexe.

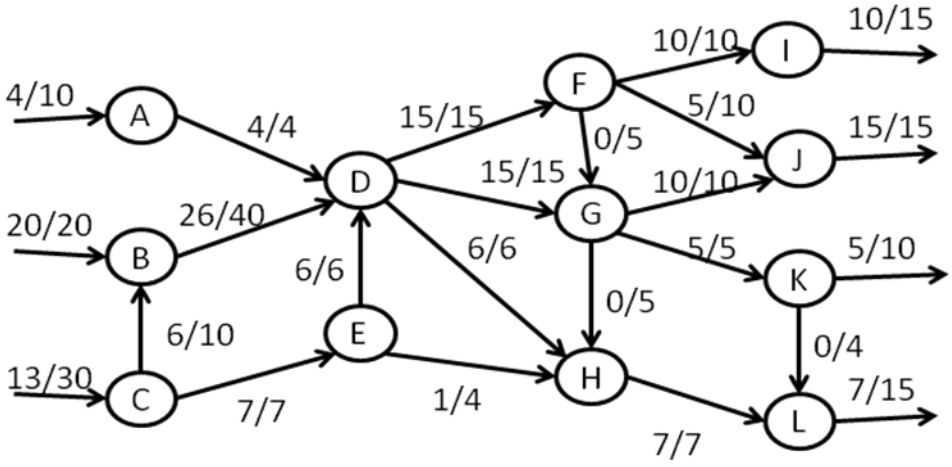
b) Réciproque : Soit A un arbre couvrant de coût minimal et [i,j] une arête de A, montrer que [i,j] est l'arête de coût minimal d'un cocycle de G que l'on identifiera.

c) En déduire une méthode pour construire un arbre de coût minimal.

Question 4: Montrer que l'algorithme détermine l'arbre couvrant de coût minimal. On montrera qu'à chaque itération l'algorithme choisit l'arête minimale d'un cocycle de G. Que ferait l'algorithme si le graphe n'était pas connexe ?

PROBLEME DE CIRCULATION URBAINE :

Le réseau routier que doit entretenir la ville de Fulkerson City est schématisé ci-dessous (la notation f_{ij}/C_{ij} donné un flot initial (f_{ij}) et le débit maximal en voitures par heure (C_{ij})).



1) Soit N le nombre maximum de voitures pouvant circuler par heure à travers ce réseau.

1.1) Calculer N. On partira du flot donné ci-dessus. Est-il complet ? Justifier votre réponse. Puis on appliquera l'algorithme de Ford Fulkerson.

1.2) Caractériser les voies que l'on peut créer de façon à augmenter N. De combien peut-on augmenter N ?

2) Les édiles locaux souhaitent améliorer la circulation en augmentant le nombre N grâce à la création de nouvelles voies. Dans la zone urbaine, seuls sont matériellement possibles la création d'une voie HK et l'élargissement de la rue EG jusqu'alors réservée aux piétons. Le choix devra donc se faire entre :

a) créer HK;

b) élargir EG;

c) créer HK et élargir EG.

2.1) Si la politique a) est choisie, quelle capacité maximum doit-on prévoir pour la voie HK ? Dans ce cas, de combien augmente N ?

2.2) Si la politique b) est choisie, quelle autre voie est-on amené à créer si l'on veut augmenter N ?

2.3) Evaluer N dans le cas c).

2) PROBLEME : SECOND PLUS COURT:

Le but de ce problème est de déterminer un second plus court chemin entre les sommets 0 et n-1 d'un graphe G=(X,U,v) positivement valué et sans circuit. Soit $\gamma(0,n-1)$ un plus court chemin de 0 à n-1. Un second plus court chemin de 0 à n-1 est un chemin de valeur minimale parmi l'ensemble des chemins de 0 à n-1 qui diffèrent de $\gamma(0,n-1)$ par au moins un arc. Un tel chemin existe s'il y a , au moins , deux chemins de 0 à n-1 dans G , ce que nous supposerons dans la suite.

On se propose de montrer que **second**, fourni par l'algorithme suivant, définit un second plus court chemin de 0 à n-1.

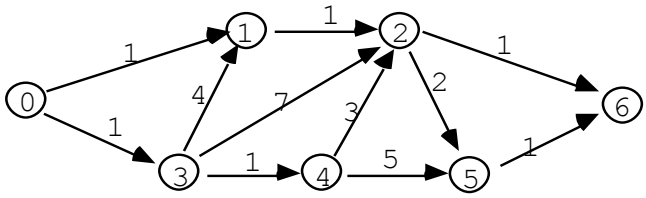
Algorithme second plus court :
début

1) Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour obtenir l'arborescence A des plus courts chemins allant de 0 à i et les potentiels $\lambda(i)$ de 0 à i pour tous les sommets i de G.
   (N.B.: On notera $\gamma(r,s)$ le chemin , s'il existe , de r à s dans A)
2) Déterminer $\gamma(0,n-1)=(y_0=0,y_1,\ldots,y_p=n-1)$.
3) Poser valeur:=$+\infty$;
   Pour j:=1 jusqu'a p faire
   pour tout $k \in (U^-(y_j) - \{y_{j-1}\})$ faire
   début
   $\alpha := \lambda(k) + v(k,y_j) + (\lambda(n-1) - \lambda(y_j))$;
   si α<valeur alors
   début
   valeur := α ; $pivot_1$:= k ; $pivot_2$:= y_j ;
   fin;
   fin;
4) **Second** := $\gamma(0,pivot_1) + (pivot_1,pivot_2) + \gamma(pivot_2,n-1)$.

fin.

QUESTIONS :

1) Appliquer l'algorithme au graphe G suivant :



N.B. : On rapportera successivement:

- le tableau de Dijkstra présenté en cours;
- l'arborescence A;
- le chemin $\gamma(0,n-1)$;
- les différentes valeurs de α;
- **second.**

Vérifier que **second** est bien un second plus court chemin dans G.

2) Etude de la complexité en fonction de n et m:

On suppose que le graphe est codé par la file des successeurs et des prédécesseurs.

2.1) Quelles sont les complexités des phases 1, 2, 3 et 4 de l'algorithme ?

En déduire la complexité totale.

2.2) Quelle amélioration peut-on proposer pour diminuer cette complexité ?

3) Preuve de l'algorithme :

On note **premier** = $\gamma(0,n-1) = (y_0=0,y_1,\ldots,y_p=n-1)$ le plus court chemin obtenu dans la phase 1) de l'algorithme et **deuxième** = $(z_0=0,z_1,\ldots,z_q=n-1)$ un second plus court chemin de 0 à n-1.

3.1) Montrer qu'il existe un entier r tel que $y_p=z_q$, $y_{p-1}=z_{q-1}$,..., $y_{p-r}=z_{q-r}$ et $y_{p-r-1}\neq z_{q-r-1}$.

3.2) Quelle est la propriété remarquable du chemin $(z_0=0,z_1,\ldots,z_{q-r-1})$?

3.3) En déduire la validité de l'algorithme.

PROBLEME D'AFFECTATION :

On veut affecter six programmes a,b,c,d,e,f à six programmeurs A,B,C,D,E,F en minimisant la somme des temps de travail et de façon à ce qu'un programmeur fasse exactement un programme. Le tableau ci-dessous rapporte les différents temps de travail. Pour résoudre ce problème d'affectation, on va appliquer l'algorithme hongrois qui permet plus généralement d'affecter n individus à n travaux en minimisant la somme des coûts d'affectation.

	a	b	c	d	e	f
A	14	6	18	16	63	15
B	41	78	44	73	70	25
C	44	81	36	80	80	78
D	46	74	5	25	83	3
E	72	32	55	51	3	81
F	69	76	12	99	83	30

1) Montrer qu'on ne change pas la solution du problème en soustrayant ou ajoutant une valeur numérique δ à tous les éléments d'une rangée (ligne ou colonne). Seule la valeur de la solution est modifiée.

Le faire sur l'exemple en soustrayant le plus petit élément de chaque rangée en commençant par les lignes et en terminant par les colonnes, (l'intérêt est de faire apparaître des zéros).

2) On associe au nouveau tableau un graphe biparti reliant les programmeurs aux programmes quand le coût réduit (obtenu après soustraction des minima en lignes et en colonnes) vaut 0. Les arcs du graphe biparti sont dits admissibles.

On introduit aussi un réseau de transport en reliant la source s aux programmeurs par des arcs de capacité 1, le puits p aux programmes par des arcs de capacité 1. Les arcs admissibles sont de capacité infinie.

a) Construire le réseau de transport.

b) Calculer un flot maximal sur ce réseau et en déduire un couplage maximal de coût nul.

c) Le marquage de Ford-Fulkerson à l'optimum permet de marquer les lignes X* de X et les colonnes Y* de Y.

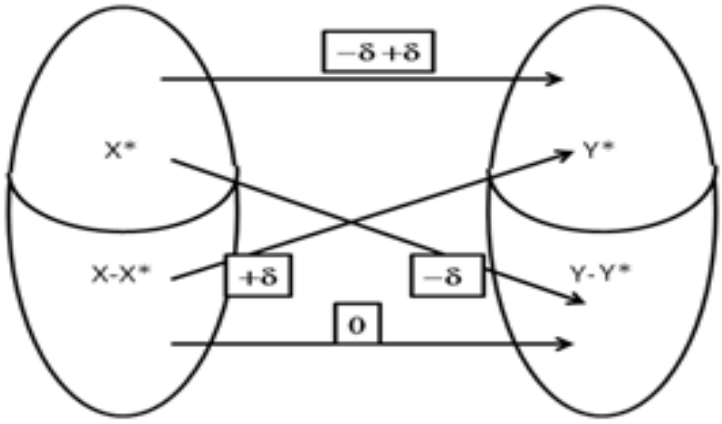
Vérifier sur l'exemple qu'il n'y a pas d'arc admissible entre X* et Y-Y*.

Vérifier sur l'exemple que les arcs entre X-X* et Y* ont un flux nul.

Justifier les deux propriétés.

d) Soit δ le plus petit coût réduit d'affectation d'un programmeur de X* à un programme de Y-Y*. Calculer δ. Ajouter δ aux colonnes de Y* et soustraire δ aux lignes de X*. Pourquoi ces opérations sont-elles licites ?

e) Montrer que la procédure pratique suivante permet de calculer la nouvelle matrice.



Procédure pratique.

-rayer toute ligne non marquée ;

-rayer toute colonne marquée ;

-soit δ le plus petit élément non rayé ;

-retrancher δ aux éléments non rayés ;

-ajouter δ aux éléments rayés deux fois.

f) On obtient une nouvelle matrice de coûts. Vérifier que les arcs de flux non nuls restent admissibles. Quelle est la propriété des arcs qui étaient admissibles et qui ne le sont plus ?

Quelle est la propriété des arcs devenus admissibles? Quelle est la capacité de l'ancienne coupe minimale ? Montrer que le nouveau marquage contient le précédent ?

g) Calculer le nouveau flot maximal ?

3) Validité de la méthode Hongroise.

On itère autant de fois que nécessaire la procédure pratique et le calcul du flot :

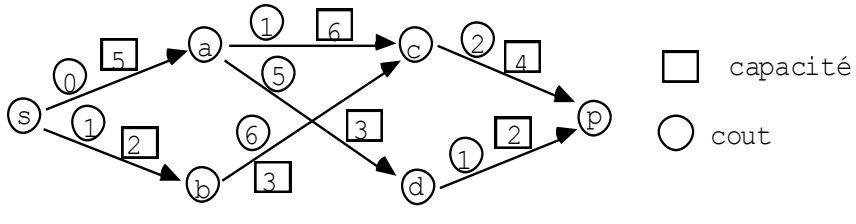
-le faire;

-à quelle condition s'arrête-t-on ?

-en déduire l'optimalité de la méthode.

EXERCICE : Algorithme de ROY:

Appliquer l'algorithme de Roy pour déterminer un flot maximal de coût minimal dans le graphe suivant.

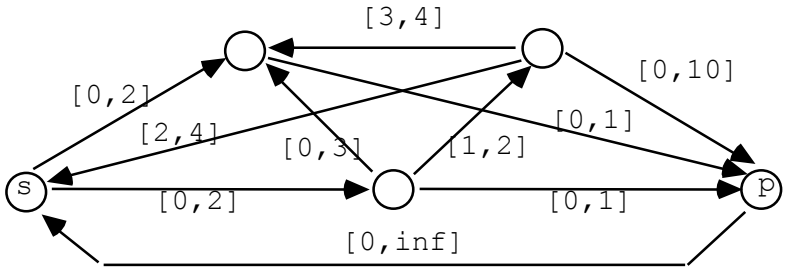


On dessinera les graphes d'écart intermédiaires et on précisera les chaînes améliorantes successives utilisées. Calculer le coût du flot obtenu.

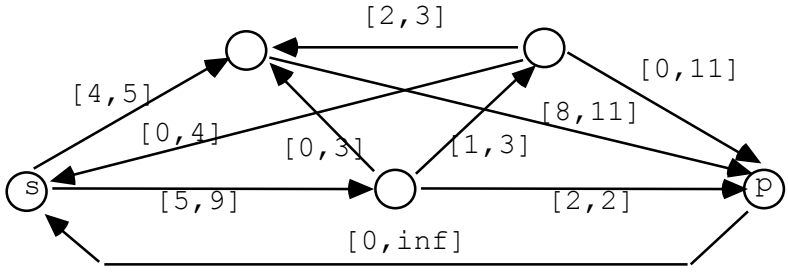
PROBLEMES DE FLOTS

Exercice 1 : flot canalisé

Construire un flot de valeur maximale sur l'arc ps, lorsqu'il existe, dans les réseaux suivants (les capacités min et max sont indiquées par $[b_{ij}, c_{ij}]$).



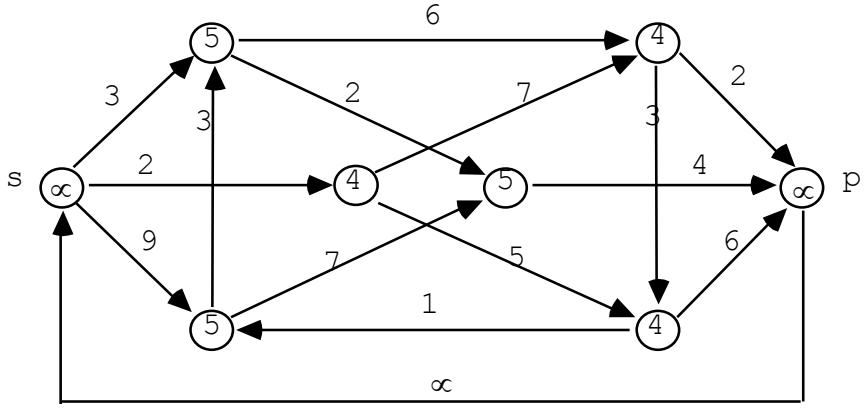
Réseau n°1



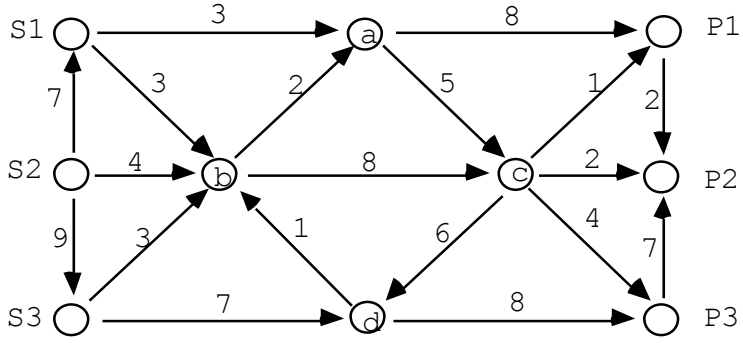
Réseau n°2

Exercice 2 : flot maximal

Considérons le réseau suivant dont , non seulement les arcs sont munis de capacité , mais aussi les sommets. Trouver un flot de valeur maximale sur ce réseau en expliquant votre méthode.



Exercice 3 : satisfaction de demandes



Dans ce réseau, les sommets S1, S2, S3 sont des dépôts qui disposent respectivement des quantités 5, 10, 5 d'un même produit. Les sommets P1, P2, P3 sont des clients dont les demandes sont respectivement : 5, 10, 5. Ces demandes peuvent-elles toutes être satisfaites à travers ce réseau ?

PROGRAMMES DE TRANSPORT.

On dispose de a_1, a_2,...,a_n unités dans des dépôts 1,2,...,n. On veut transporter ces unités vers des destinations 1,2,...,m où se manifestent des demandes b_1,b_2,...,b_m, avec : $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} bj$

La méthode appliquée au problème d'affectation se généralise. On fait apparaître des zéros en lignes et en colonnes. On introduit la notion d'arcs admissibles et on trace un réseau de transport sur lequel on recherche un flot maximum. On calcule ensuite un δ pour modifier ce réseau de façon à finalement obtenir, après un certain nombre d'itérations de la procédure pratique, un flot satisfaisant toutes les demandes et qui est de coût minimal.

On demande d'appliquer cette méthode au problème suivant. On a trois dépôts où sont disponibles respectivement 3, 4, 7 hélicoptères et on doit répartir ces hélicoptères sur quatre sites où se manifestent respectivement des demandes de 1, 3, 5, 5 hélicoptères. Les coûts unitaires de transport sont donnés dans le tableau suivant. Déterminer la solution optimale.

2	4	3	2	4
6	2	6	4	3
5	6	7	7	7
1	3	5	5	