

# MT94/P24

## Introduction aux mathématiques appliquées

S. Mottelet, F. de Vuyst

Université de Technologie de Compiègne

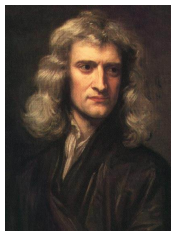
# Plan

- 1 Présentation de l'UV
- 2 Présentation des outils
- 3 Format pédagogique

# Chapitres

- 1 Codage et dérivation
- 2 Problèmes non-linéaires I
- 3 Equations différentielles et systèmes dynamiques
- 4 Problèmes non-linéaires II
- 5 Valeurs propres
- 6 Equations aux dérivées partielles

# Codage et dérivation



*Isaac Newton, 4/1/1643 - 31/3/1727*

*Gottfried Wilhelm Leibniz, 1/7/1646 - 14/11/1716*

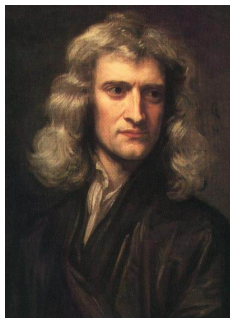
*Jérôme Cardan, 24/9/1501 - 21/9/1576*

$$x = \sum_k d_k 2^{-k}, d_k \in \{0, 1\}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + |h|\epsilon(h)$$

# Problèmes non linéaires I



*Isaac Newton, 4/1/1643 - 31/3/1727*

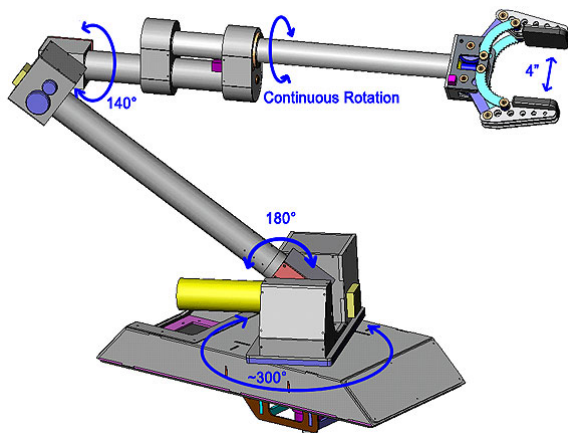
$$Ax = b, \quad f(x) = 0$$

- Methode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k)$$

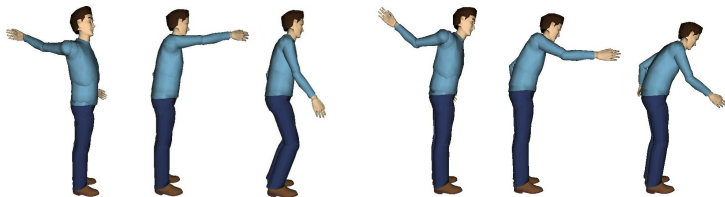
# Problèmes non linéaires I

## Cinématique inverse



# Problèmes non linéaires I

## Cinématique inverse



# Equations différentielles



*Leonhard Paul Euler, 15/4/1707 - 18/9/1783*  
*Baron Augustin Louis Cauchy, 21/8/1789 - 23/5/1857*

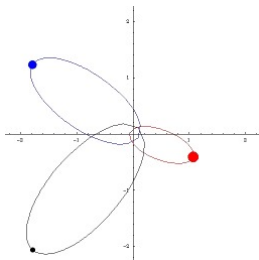
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0,$$
$$x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k)f(t_k, x_k).$$



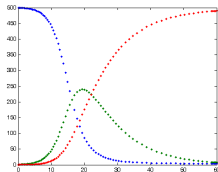
# Equations différentielles

## Exemples

- Mécanique céleste

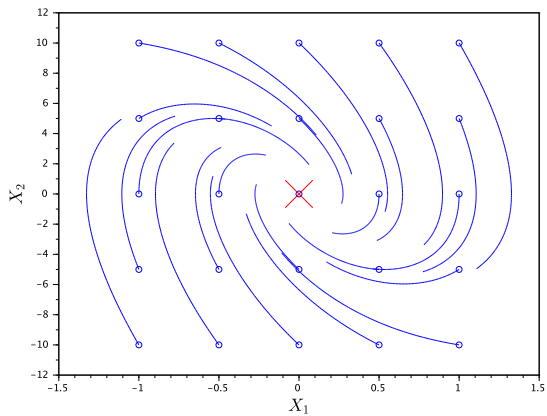


- Epidémiologie

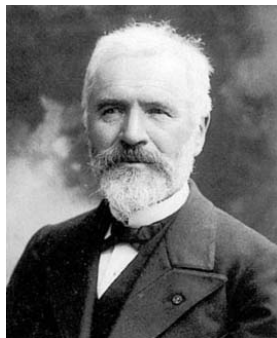
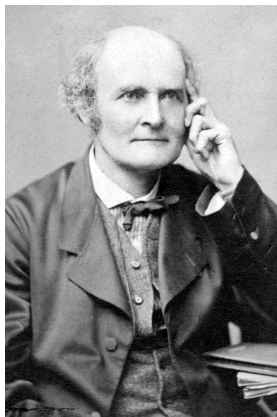


# Equations différentielles

Equilibres, stabilité, hystérésis, chaos, ...



# Valeurs propres



*Arthur Cayley, 1/8/1821 - 26/1/1895*  
*Camille Jordan, 5/1/1838 - 22/1/1922*

# Valeurs propres

Tacoma Narrows Bridge, November 7, 1940





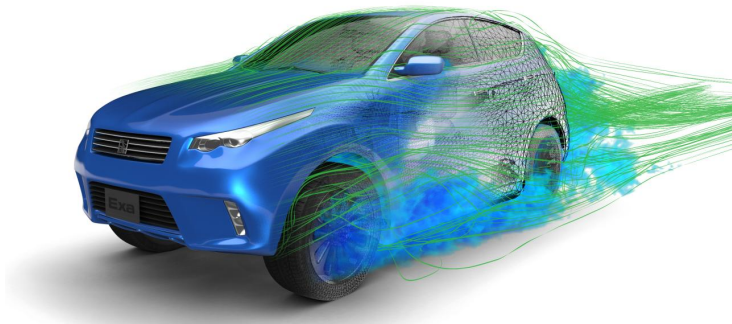
## Algorithme PageRank

# Problèmes non-linéaires II

## Optimisation

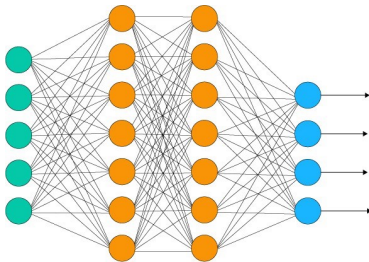
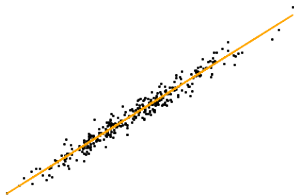
$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

Trouver  $x^*$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x^*) \leq f(x)$



# Problèmes non-linéaires II

Régression, apprentissage automatique



# Equations aux dérivées partielles



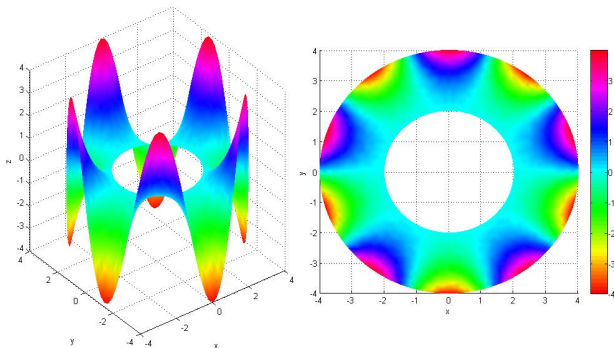
*Joseph Fourier, 21/3/1768 - 16/5/1*  
*Jean Pierre Simon de Laplace, 23/3/1749 - 5/3/1827*

- Transferts de chaleur, de matière
- Mécanique
- ...



# Equations aux dérivées partielles

## Equation de Laplace

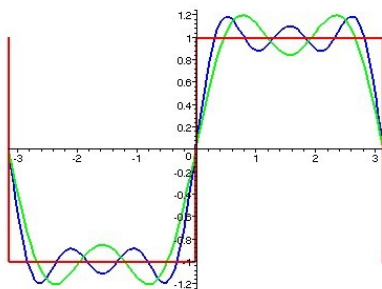


$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \quad x \in \Omega$$

$$u = g, \quad x \in \Gamma$$

# Equations aux dérivées partielles

## Séries de Fourier

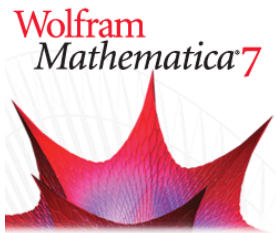


$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k>0} a_n \cos\left(2n\pi \frac{x}{T}\right) + b_n \sin\left(2n\pi \frac{x}{T}\right)$$

- Base orthogonale dans un espace fonctionnel
- Traitement du signal, filtrage, compression, etc.

# Logiciels

# Calcul symbolique/exact



```
> diff(cos(x), x);
```

$-\sin(x)$

```
> sum(1/n^2, n=1..infinity);
```

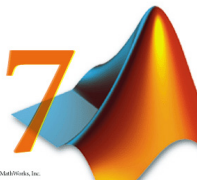
$\frac{\pi^2}{6}$

```
> taylor(cos(x), x, 8);
```

$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^8)$

# Calcul numérique

**MATLAB**<sup>®</sup>  
*The Language of Technical Computing*



Copyright 1984-2006, The MathWorks, Inc.



# Calcul numérique



# Calcul numérique

```
--> A=[1/3 2;3 4/5]; b=[1;1];
```

```
--> x=A\b
```

```
x =
```

```
0.2093023255814
```

```
0.4651162790698
```

```
--> A*x-b
```

```
ans =
```

```
-1.110223025D-16
```

```
0.
```



# Calcul numérique

```
--> 1/3  
ans =
```

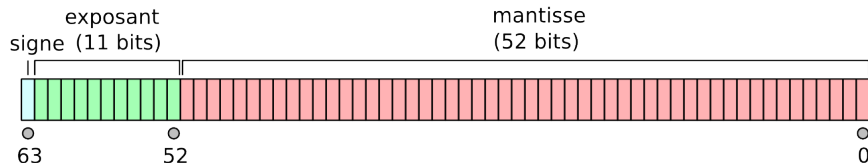
```
0.3333333333333333148296
```

?

# Calcul numérique

## Codage IEEE 754

### Nombre réel codé sur 64 bits



$$\frac{1}{3} = \sum_{k>0} 2^{-2k} = (0.0101010101 \dots)_2$$

$$x = (-1)^s (1.m_1 m_2 \dots m_{52})_2 \times 2^{e-1023}$$

$$(1.010101 \dots 01)_2 \times 2^{-2} = (0.333333333333333333333333333333148296 \dots)_{10}$$

# Calcul numérique

## Précision relative

```
--> (1/3)*3
```

```
ans =
```

```
1.
```

?

# Calcul numérique

## Précision relative

```
--> 1+2^-52
```

```
ans =
```

```
1.00000000000000002220446
```

```
--> 1+2^-53
```

```
ans =
```

```
1.
```

$$\varepsilon = 2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$$



- Open-source (license GPL)
- Multi-plateforme (Windows, OSX, Linux)
- Grande communauté d'utilisateurs et de contributeurs

- Types de données variés
  - Matrices pleines/creuses, tenseurs, booléens, polynômes, structures, etc.
- Graphiques OpenGL
- Editeur intégré
- Notebook Jupyter
- Interfacage avec C, C++, ...
- ...

Premier TD : initiation à Scilab

# Format pédagogique

- 1 Un chapitre = 2h de cours, 6h de TD, THE variable
- 2 TD sur ordi (ordi portable perso) en FA 306
- 3 Evaluation = final sur ordi (PC du SME) + cahier d'intégration

# Cahier d'intégration

Montrer votre appropriation d'un ou plusieurs chapitres de l'UV, vos recherches personnelles, etc.

- Document principal écrit (au moins 30 pages) **format pdf**
- Tous types de media autorisés (codes Scilab, notebooks, images, vidéos, ...) **dès l'instant que vous en êtes l'auteur**



```
$$  
f(x)=\frac{a_0}{2}+  
\sum_{k>0}a_n \cos\left(2n\pi \frac{x}{T}\right)+  
b_n \sin\left(2n\pi \frac{x}{T}\right)  
$$
```

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k>0} a_n \cos\left(2n\pi \frac{x}{T}\right) + b_n \sin\left(2n\pi \frac{x}{T}\right)$$

- Overleaf (<https://fr.overleaf.com>)