MT94/P26

Introduction aux mathématiques appliquées

S. Mottelet, F. de Vuyst

Université de Technologie de Compiègne

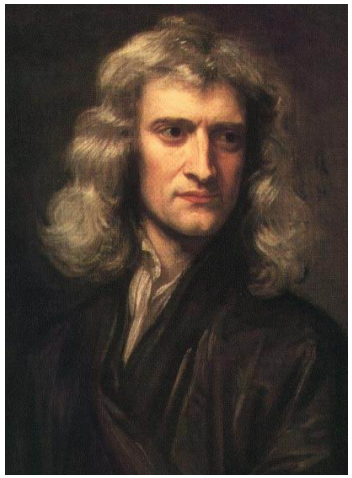
Plan

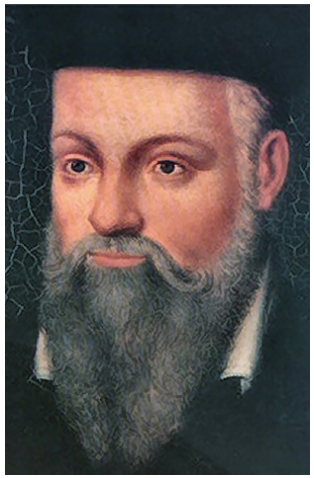
1. Présentation de l'UV
2. Présentation des outils
3. Format pédagogique

Chapitres

1. Codage et dérivation
2. Problèmes non-linéaires I
3. Equations différentielles et systèmes dynamiques
4. Problèmes non-linéaires II
5. Valeurs propres
6. Equations aux dérivées partielles

Codage et dérivation





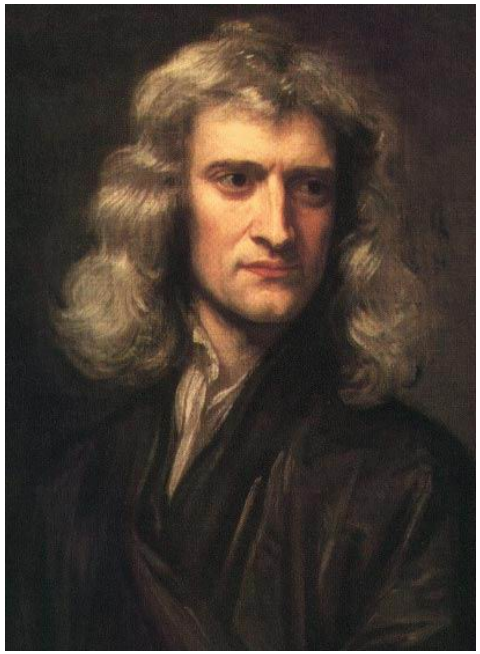
Isaac Newton, 4/1/1643 - 31/3/1727
Gottfried Wilhelm Leibniz, 1/7/1646 - 14/11/1716
Jérôme Cardan, 24/9/1501 - 21/9/1576

$$x = \sum_k d_k 2^{-k}, d_k \in \{0, 1\}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + |h|\epsilon(h)$$

Problèmes non linéaires I



Isaac Newton, 4/1/1643 - 31/3/1727

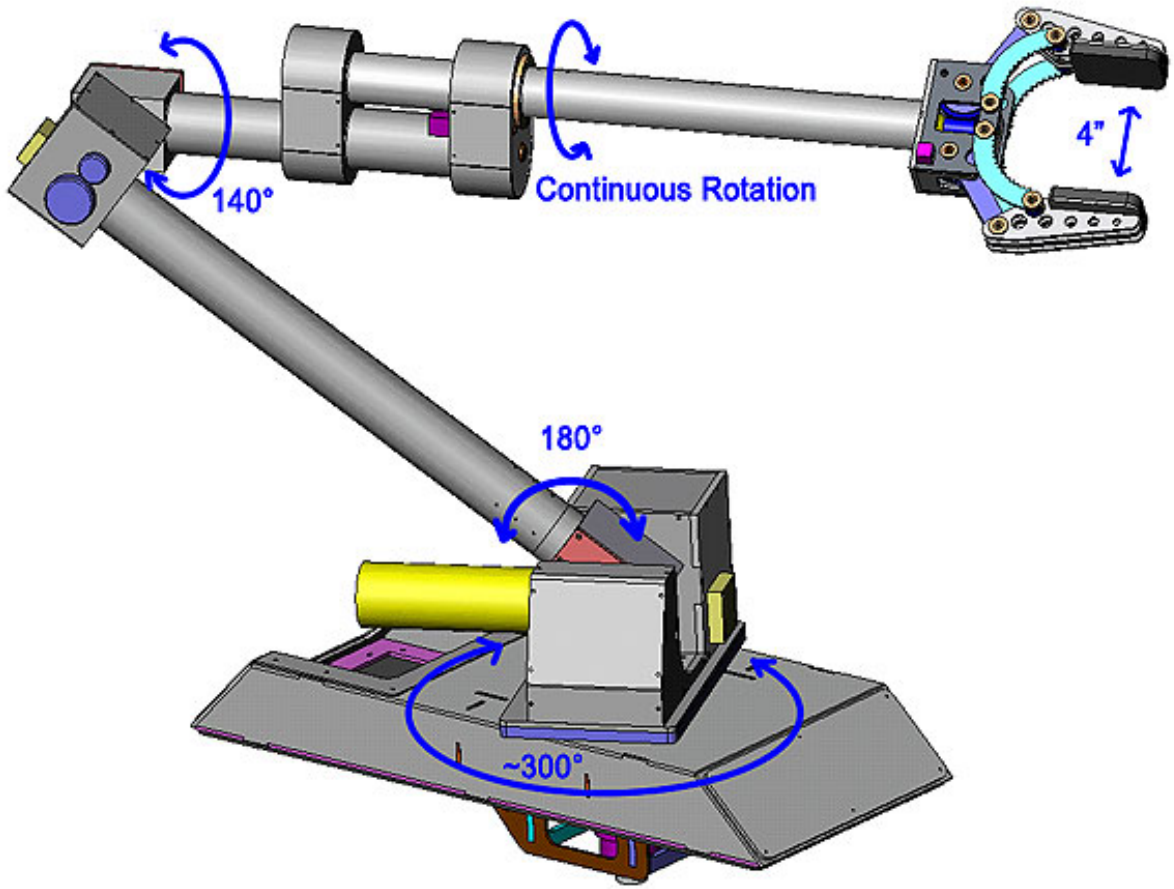
$$Ax = b, \quad f(x) = 0$$

- Methode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - [f'(x_k)]^{-1} f(x_k)$$

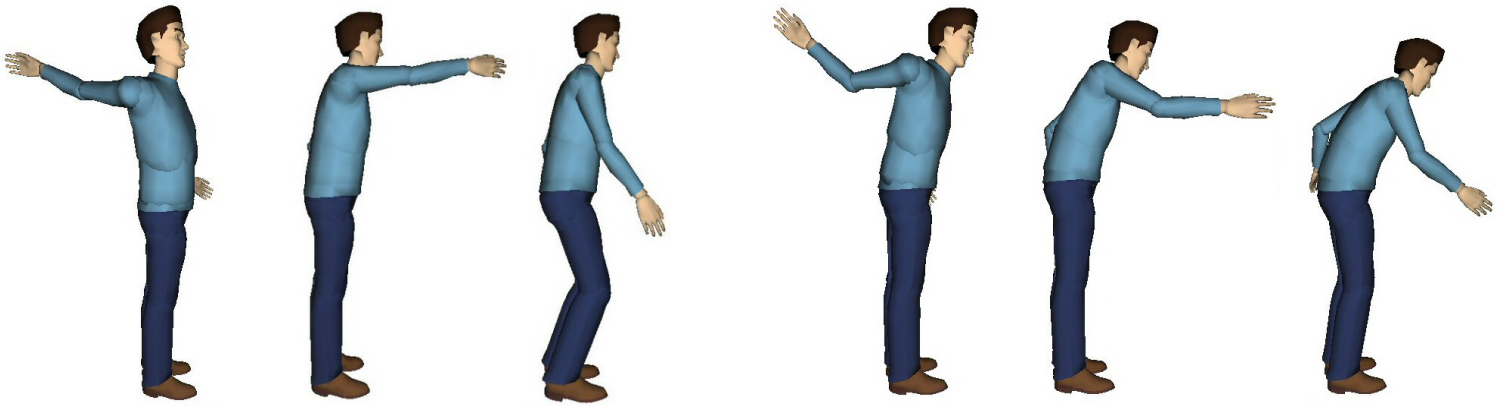
Problèmes non linéaires I

Cinématique inverse



Problèmes non linéaires I

Cinématique inverse



Equations différentielles





Leonhard Paul Euler, 15/4/1707 - 18/9/1783
Baron Augustin Louis Cauchy, 21/8/1789 - 23/5/1857

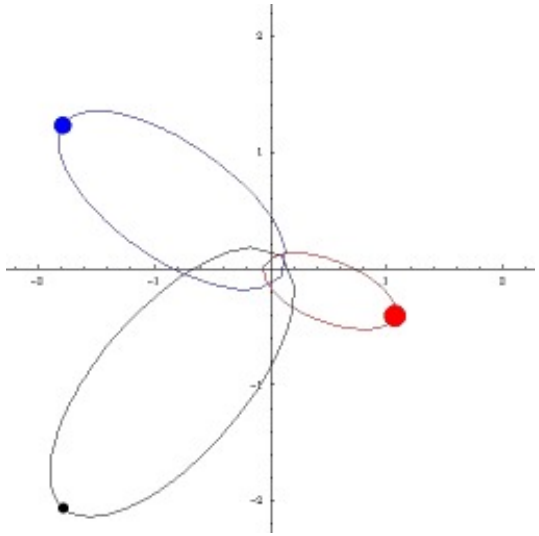
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \ x(0) = x_0,$$

$$x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, x_k).$$

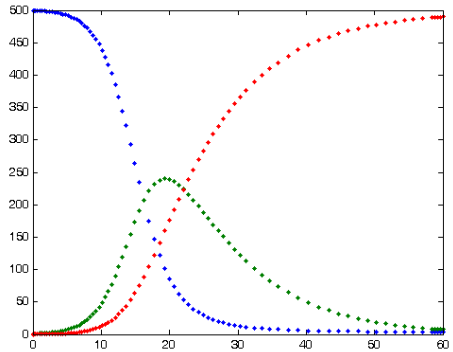
Equations différentielles

Exemples

- Mécanique céleste

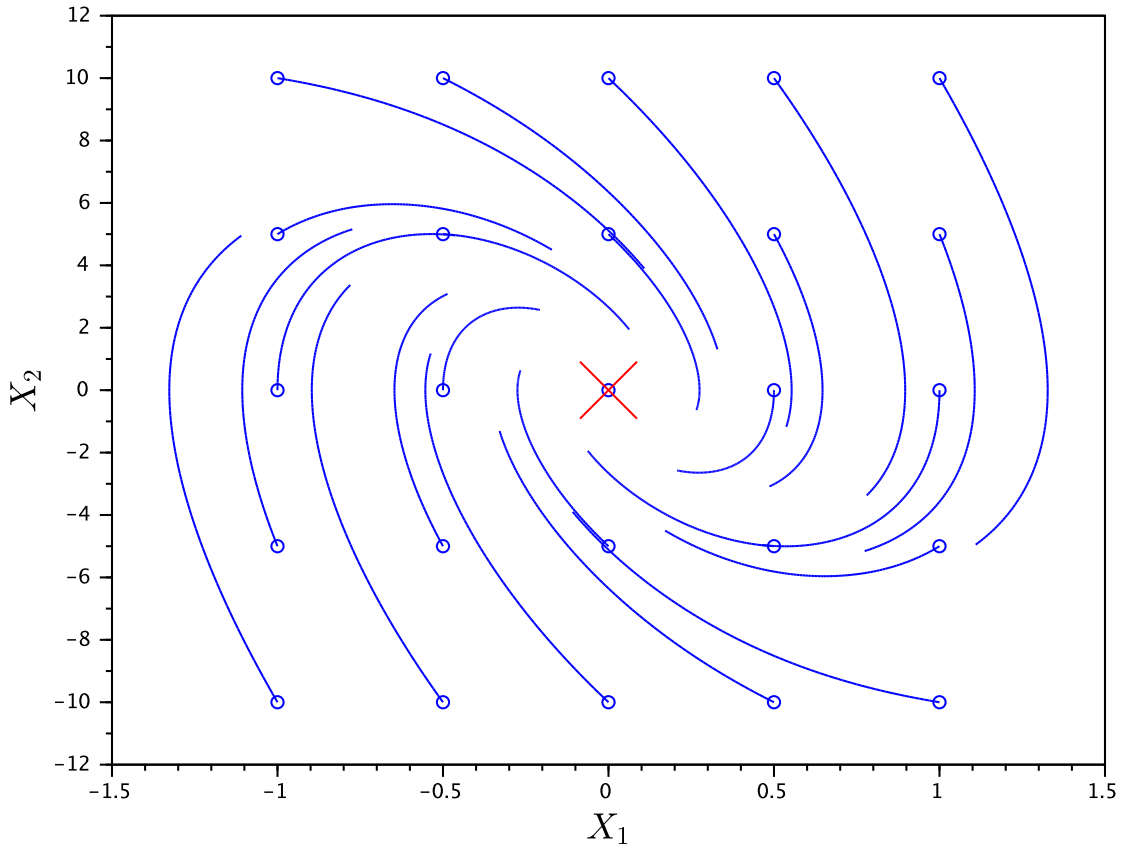


- Epidémiologie

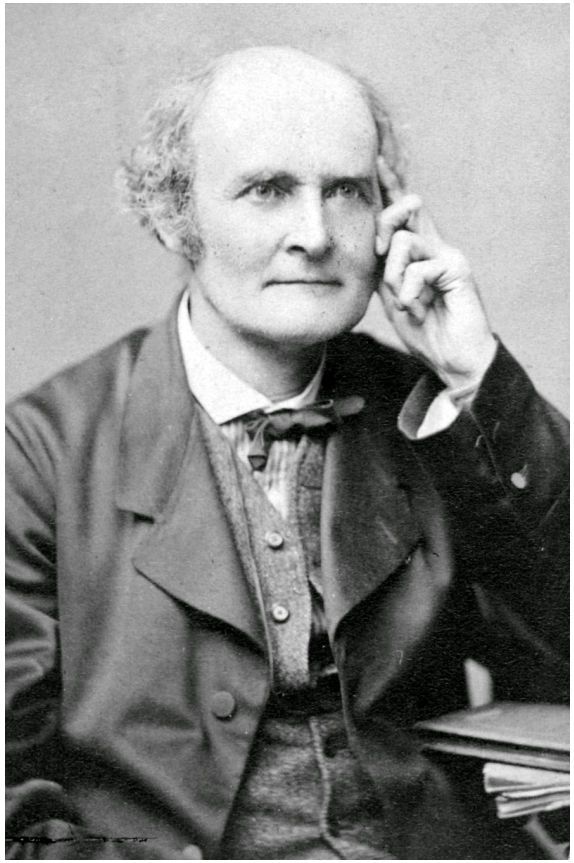


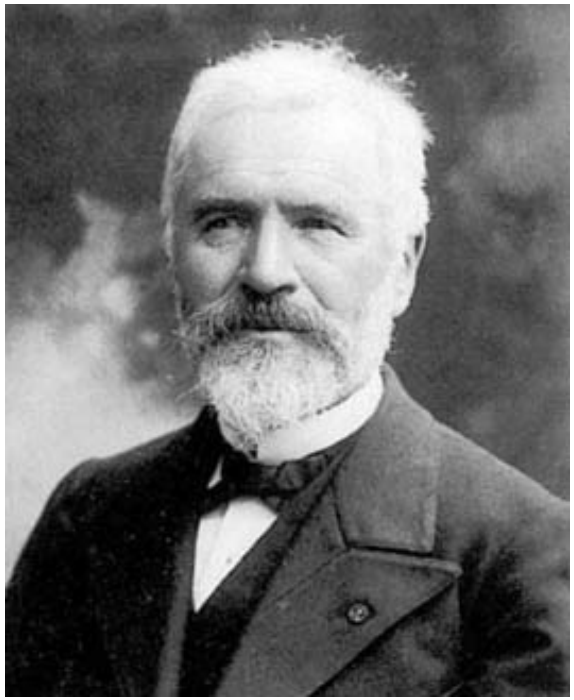
Equations différentielles

Equilibres, stabilité, hystérésis, chaos, ...



Valeurs propres





Arthur Cayley, 1/8/1821 - 26/1/1895
Camille Jordan, 5/1/1838 - 22/1/1922

Valeurs propres

Tacoma Narrows Bridge, November 7, 1940



Valeurs propres



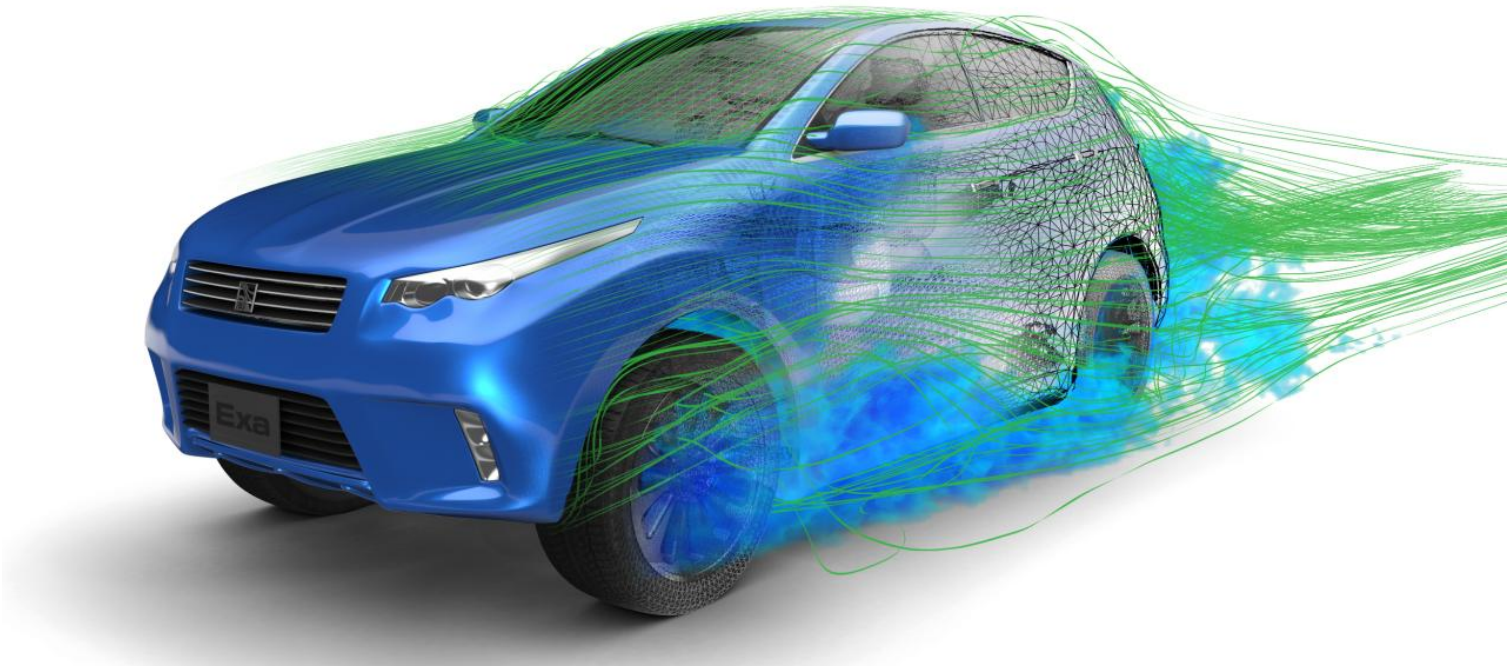
Algorithme PageRank

Problèmes non-linéaires II

Optimisation

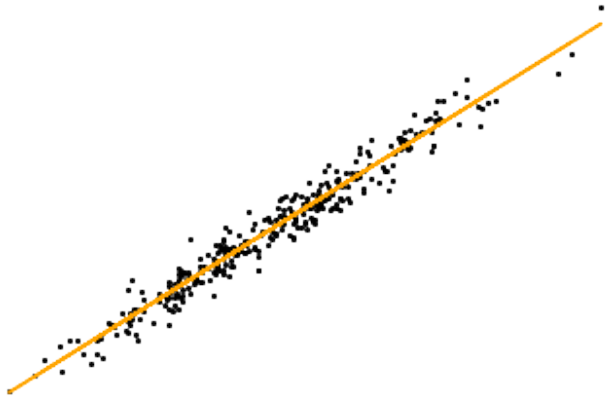
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

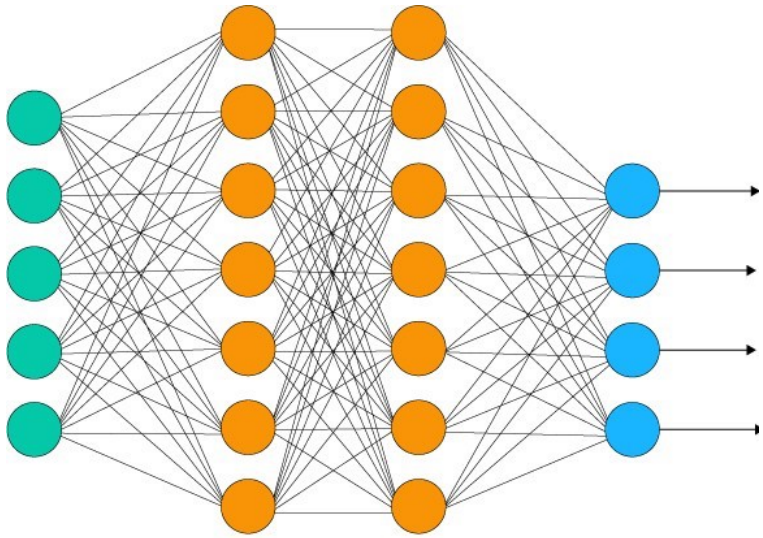
Trouver x^* tel que $\forall \in \mathbb{R}^n$, $f(x^*) \leq f(x)$



Problèmes non-linéaires II

Régression, apprentissage automatique





Equations aux dérivées partielles



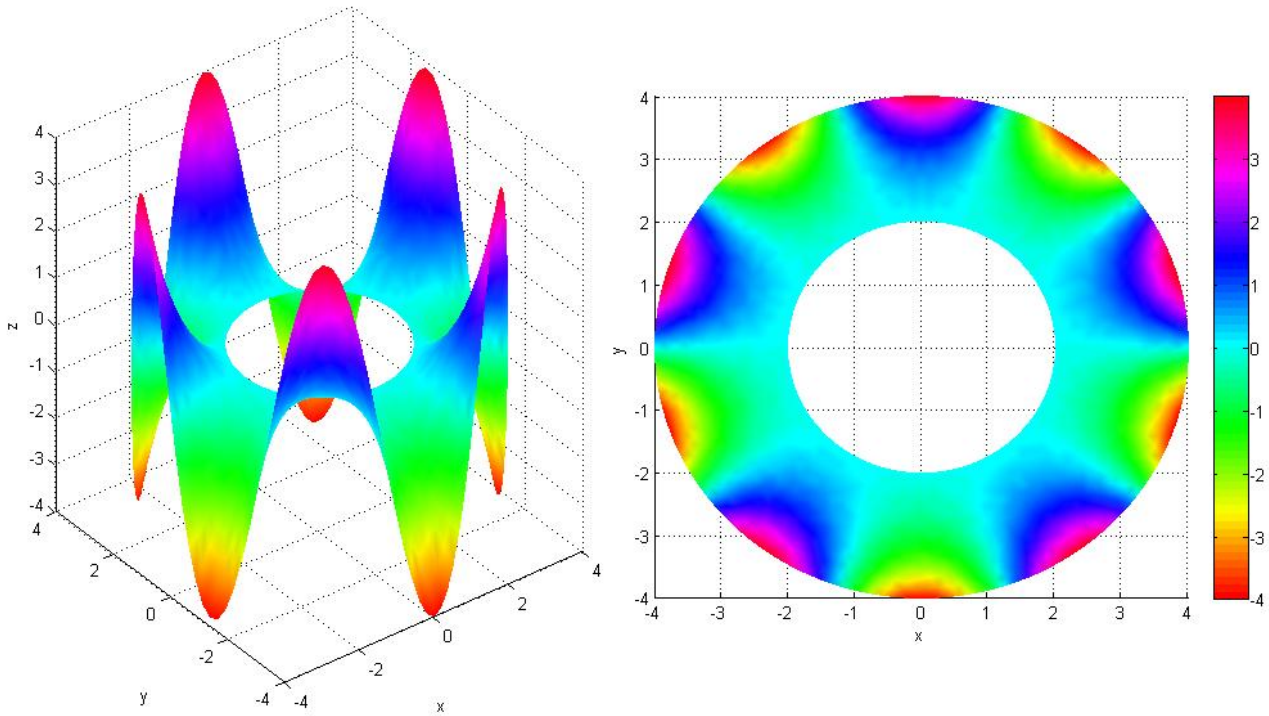


Joseph Fourier, 21/3/1768 - 16/5/1
Jean Pierre Simon de Laplace, 23/3/1749 - 5/3/1827

- Transferts de chaleur, de matière
- Mécanique
- ...

Equations aux dérivées partielles

Equation de Laplace

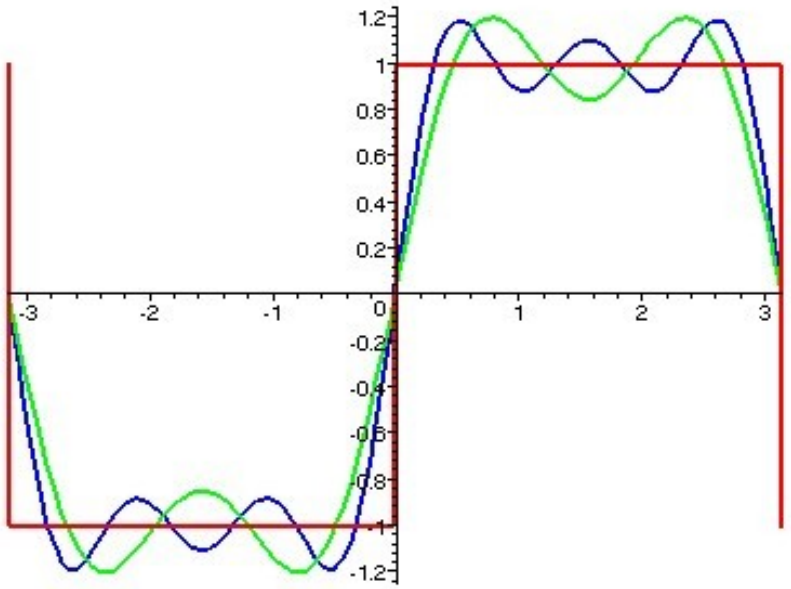


$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,\ x \in \Omega$$

$$u = g,\ x \in \Gamma$$

Equations aux dérivées partielles

Séries de Fourier





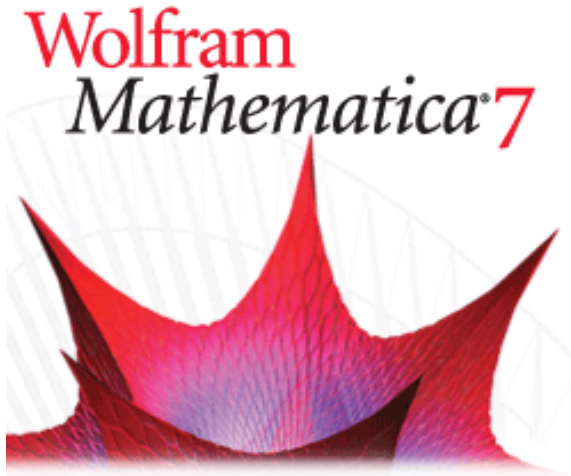
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k>0} a_n \cos\left(2n\pi\frac{x}{T}\right) + b_n \sin\left(2n\pi\frac{x}{T}\right)$$

- Base orthogonale dans un espace fonctionnel
- Traitement du signal, filtrage, compression, etc.

Logiciels

Calcul symbolique/exact



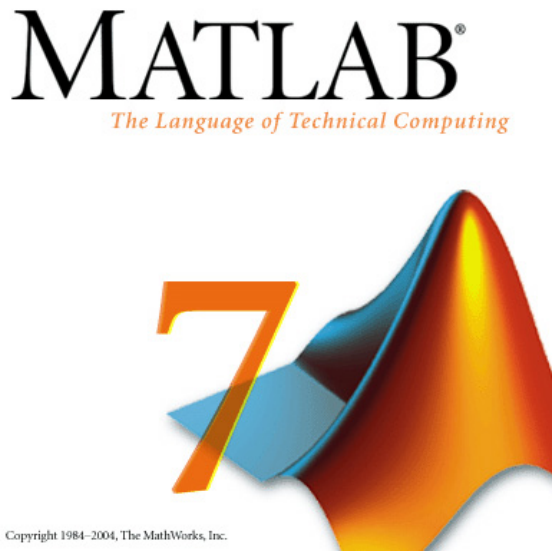


```
> diff(cos(x),x);
                                -sin(x)

> sum(1/n^2,n=1..infinity);
                                   2
                                 Pi
                                 ---
                                  6

> taylor(cos(x),x,8);
                              2         4          6       8
                1 - 1/2 x  + 1/24 x  - 1/720 x  + O(x )
```

Calcul numérique

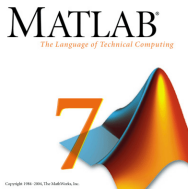








Calcul numérique









Calcul numérique

```
--> A=[1/3 2;3 4/5]; b=[1;1];

--> x=A\b
 x   =

    0.2093023255814
    0.4651162790698

--> A*x-b
 ans   =

  -1.110223025D-16
   0.
```

Calcul numérique

```
--> 1/3
 ans  =

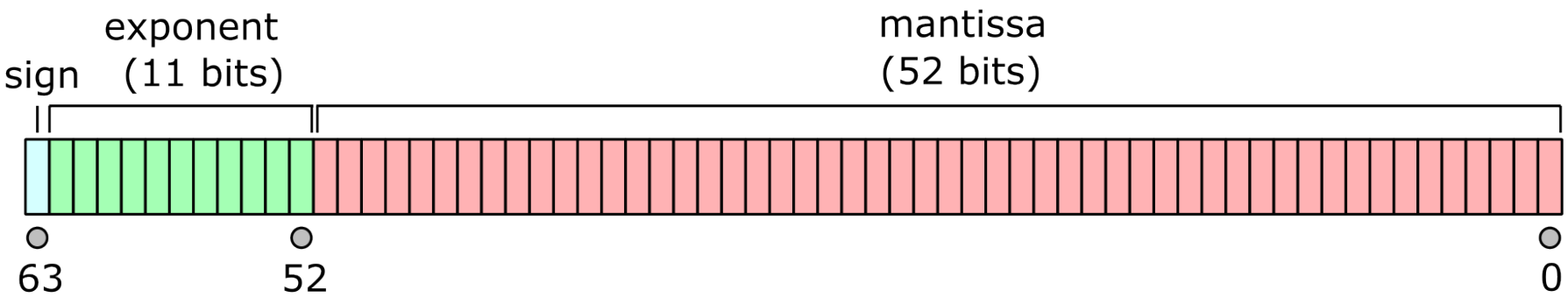
    0.33333333333333333148296
```

?

Calcul numérique

Codage IEEE 754

Nombre réel codé sur 64 bits



$$\frac{1}{3} = \sum_{k>0} 2^{-2k} = (0.0101010101\ldots)_2$$

$$x = (-1)^s (1.m_1 m_2 \ldots m_{52})_2 \times 2^{e-1023}$$

$$(1.010101\ldots01)_2 \times 2^{-2} = (0.33333333333333148296\ldots)_{10}$$

Calcul numérique

Précision relative

```
--> (1/3)*3
 ans  =

    1.
```

?

Calcul numérique

Précision relative

```
--> 1+2^-52
 ans  =

    1.0000000000000002220446

--> 1+2^-53
 ans  =

    1.
```

$$\varepsilon = 2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$$

Scilab



- Open-source (license GPL)
- Multi-plateforme (Windows, OSX, Linux)
- Grande communauté d'utilisateurs et de contributeurs

Scilab

- Types de données variés

  Matrices pleines/creuses, tenseurs, booléens, polynômes, structures, etc.
- Graphiques OpenGL
- Editeur intégré
- Notebooks Jupyter
- Interfacage avec C, C++, ...
- ...

Premier TD : initiation à Scilab et Jupyter

Format pédagogique

1. Un chapitre = 2h de cours, 6h de TD, THE variable
2. TD sur ordi (ordi portable perso) en FA 306
3. Evaluation = projet tutoré (avec soutenance) + final sur ordi (PC du SME)

Jupyter



Jupyter

- MarkDown + LaTeX :

```
$$
f(x)=\frac{a_0}{2}+
\sum_{k>0}a_n \cos\left(2n\pi \frac{x}{T}\right)
+b_n \sin\left(2n\pi \frac{x}{T}\right)
$$
```

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k>0} a_n \cos\left(2n\pi \frac{x}{T}\right) + b_n \sin\left(2n\pi \frac{x}{T}\right)$$

- Code Scilab + text outputs + graphiques générés

JupyterLab en local sur votre ordi et/ou serveur JupyterHub réservé à MT94.

Commentaires P25

”A mon avis, l’UV devrait être bien plus mise en avant. Elle m’a permis d’amplement améliorer ma compréhension des outils mathématiques de base vus en TC. MT22 m’a complètement découragé. Et alors que j’étais convaincue qu’il fallait que j’abandonne l’analyse, MT94 a repris chaque concept, les a ré-expliqué, les a employés dans des applications fascinantes, et m’a en quelque sorte rattrapée au bord du précipice de l’abandon. En bref, l’UV MT94 a eu une place majeure dans mon cursus, et je suis certaine qu’elle pourrait aider d’autres étudiants.”

Commentaires P25

”U.V incroyable tres content de l’avoir en TC04. On devrait avoir plus d’UV comme ça à l’UTC et la découverte de scilab s’est faite avec plaisir. Les enseignants sont aussi des perles et ils sont tous deux adorables et l’organisation du semestre était tres structure. J’ai adoré le 1 cours sur 2. On avait pas beaucoup de notions différentes mais chacune était tres profonde et complexe et amenait vers d’autres choses donc super intéressant ! J’ai adoré ! ”

Commentaires P25

”Merci beaucoup au channel YouTube”

