MT09-A2017 – Examen final – Questions de cours
Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n° :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $h > 0$. On pose $t_0 = 0$, $t_1 = h$ et $t_2 = 3h$.

1. Écrire les polynômes de la base de Lagrange associée à $t_0,\ t_1,\ t_2$.
2. Soit une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Écrire le polynôme interpolant f aux points t_i, $i = 0, 1, 2$.
3. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$. On prend maintenant les points $\theta_i = \theta_0 + ih$, pour $i = 0, \ldots, N$. Étant donnés $(f_i)_{i=0,\ldots,N}$, $(d_i)_{i=0,\ldots,N-1}$ et $(c_i)_{i=0,\ldots,N-1}$, on définit les polynômes :
$$p_i(t) = f_{i+1} + \frac{d_i}{h}(t - \theta_{i+1}) + \frac{c_i}{h^2}(t - \theta_i)(t - \theta_{i+1}).$$
On définit la fonction g par : $g(t) = p_i(t) \quad$ si $t \in]\theta_i, \theta_{i+1}]$.
Donner, **en le justifiant**, les conditions sur les d_i et les f_i pour que g soit continue sur $]\theta_0, \theta_N]$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit A une matrice réelle de $\mathcal{M}_{mn}$ avec $m > n$ et b un vecteur de taille m. On suppose que A est de plein rang. On désire minimiser $\|Ax - b\|^2$. On suppose que A admet une décomposition QR.

1. Quelles sont les propriétés de Q et R?
2. Écrire, **en le justifiant**, un système équivalent aux équations normales, obtenu à l'aide de Q et R. Ce système admet-il une solution unique ?

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit une matrice A dans $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$. On suppose que A est de plein rang. On pose $J(x) = \|Ax - b\|_2^2$.

1. Montrer que $\ker(A^T A) = \ker(A)$.
2. En déduire que les équations normales admettent une unique solution $\hat{x}$.
3. Soit $\delta \in \mathbb{R}^n$. Calculer $J(\hat{x} + \delta) - J(\hat{x})$.
4. En déduire que J admet un minimum en $\hat{x}$.

MT09-A2017- Examen final
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5.5 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 10 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions sont partiellement indépendantes les unes des autres.

Soient un réel $T > 0$ et un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = nh$ pour $n = 0, \dots, N$. On considère le système masse-ressort sans amortissement dont l'équation différentielle du mouvement s'écrit

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -k\, x(t). \tag{1}$$

avec la condition initiale $x(0) = 0$, $x'(0) = \omega_0$, où on a posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

1. Montrer que la solution du problème différentiel est $x(t) = \sin(\omega_0\, t)$.
2. (a) Mettre l'équation différentielle sous la forme normale : $U'(t) = F(t, U(t))$, où on précisera F, ses ensembles de départ et d'arrivée.
   (b) On introduit la vitesse $u(t) = x'(t)$. Montrer que cette forme normale peut s'écrire sous la forme
   $$\begin{bmatrix} x'(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$
   avec une matrice A à déterminer.
3. Montrer que l'énergie totale du système (somme de l'énergie élastique de ressort et de l'énergie cinétique) définie par
   $$E = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m u^2,$$
   est conservée au cours du temps, c'est-à-dire
   $$\frac{dE(t)}{dt} = 0.$$
   On dit que le système est symplectique ou conservatif.
4. Écrire le schéma d'Euler explicite appliqué à la forme normale du système.
5. On définit l'énergie discrète au temps $t_n = nh$ comme
   $$E_n = \frac{1}{2} k (x_n)^2 + \frac{1}{2} m (u_n)^2.$$
   (a) Montrer que pour le schéma d'Euler explicite, on a
   $$E_{n+1} = \left(1 + h^2 \omega_0^2\right) E_n.$$
   (b) En déduire que pour h fixé, pour tout réel $M > 0$, il existe un entier n_0 tel que $\forall n > n_0$,
   $$E_n > M.$$
   Commenter.
6. On considère dans la suite le schéma numérique suivant
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & x_n + h\, \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}, \\ u_{n+1} & = & u_n - h\, \omega_0^2\, \dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}, \end{array} \right. \qquad \forall n = 1, 2, \dots \tag{2}$$
   (a) On étudie l'ordre du schéma (2).
      i. Écrire un développement de Taylor à l'ordre 3 de $x(t_{n+1})$ et à l'ordre 4 de $u(t_{n+1})$.

ii. Définir l'erreur de troncature locale $\boldsymbol{\tau}_{n+1}(h)$. Vérifier qu'elle a 2 composantes notées $(\boldsymbol{\tau}_{n+1})_1(h) = \phi_{n+1}(h)$ et $(\boldsymbol{\tau}_{n+1})_2(h) = \psi_{n+1}(h)$

iii. Calculer l'ordre de l'erreur pour $\phi_{n+1}(h)$.

iv. Calculer l'ordre de l'erreur pour $\psi_{n+1}(h)$. On rappelle que x est solution de l'équation différentielle (1).

v. En déduire l'ordre du schéma (2).

(b) Calculez respectivement $(x_{n+1} - x_n)(x_n + x_{n+1})$ et $(u_{n+1} - u_n)(u_n + u_{n+1})$. En déduire que

$$E_{n+1} = E_n \quad \text{pour tout } n.$$

On dit que le schéma numérique est symplectique.

(c) Réécrire le schéma (2) de manière totalement explicite, sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \dfrac{1}{\beta(h)}\left(\alpha(h)x_n + hu_n\right), \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{\beta(h)}\left(\alpha(h)u_n - h\omega_0^2 x_n\right), \end{array}\right. \qquad \forall n = 1, 2, \dots \tag{3}$$

où α et β sont des fonctions de h à préciser.

(d) Montrer que quand $h \to 0$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\alpha(h)}{\beta(h)} - 1\right) \sim -\frac{h\omega_0^2}{2}.$$

(e) On étudie la zéro-stabilité du schéma.

i. Soit $\phi(t, V, h)$ une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}^2$, et soit M_h une matrice de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ dépendant de h. On suppose que $\phi(t, V, h) = M_h V$. Montrer que s'il existe K indépendant de h et $h_0 > 0$ tel que $|||M_h|||_\infty \leq K$ pour tout $h < h_0$, alors ϕ est lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

ii. Mettre le schéma (3) sous la forme $X_{n+1} = X_n + h\phi(t_n, X_n, h)$.

iii. Déduire des questions précédentes que le schéma (3) est zéro-stable.

iv. Conclure sur la convergence et l'ordre du schéma (3).

Exercice 2 : *(barème approximatif : 4 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soient t_0, $T > 0$ deux réels et f une fonction de classe C^1 : $(t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, y) \in \mathbb{R}^p$. On cherche à résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :

$$\text{trouver } y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}^p), \text{ telle que } \left\{\begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \text{ pour } t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0. \end{array}\right. \tag{4}$$

On introduit un entier $N > 0$ et un pas $h = T/N$. Soit le schéma numérique

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{z}_{n+1} & = & z_n + h\left(a_0 f(t_n, z_n) + a_1 f(t_{n-1}, z_{n-1}) + a_2 f(t_{n-2}, z_{n-2})\right), \\ z_{n+1} & = & z_n + h\left(\beta f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}) + b_0 f(t_n, z_n) + b_1 f(t_{n-1}, z_{n-1}) + b_2 f(t_{n-2}, z_{n-2})\right). \end{array}\right. \tag{5}$$

1. Écrire une fonction scilab `Z = schema(y0, ..., t0, T, N, f)` implémentant le schéma (5). On cherchera à utiliser le moins possible d'évaluations de la fonction f.

2. Indiquer comment on peut calculer les conditions initiales manquantes.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 2 points)* **CHANGEZ DE COPE**

Soient A et b la matrice et le vecteur définis ci-dessous :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -1.5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de la décomposition QR de la matrice A donne le résultat ci-dessous :

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que Q et R possèdent les propriétés de la décomposition $A = QR$.

(a) Expliciter le système équivalent aux équations normales faisant intervenir Q et R.

(b) Résoudre ce système.

2. (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe au plus près des points de coordonnées : $(3; 2.5)$, $(-1; -1.5)$ et $(1; -1)$.

   (b) Tracer la droite et les trois points ci-dessus.