MT09-A2018 – Examen médian – Questions de cours
Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n°:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient A une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$.

1. Rappeler l'expression du conditionnement de A.
2. Montrer que $|||I||| = 1$ et en déduire une minoration sur le conditionnement.
3. Soit x la solution du système $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$. Soit δb un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. Soit $x + \delta x$ la solution de $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Donner en la démontrant une majoration de l'erreur $\|\delta x\|/\|x\|$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 1.5 points)*

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle $(n > 0)$. Soit une base orthonormée $(y_i)_{i=1,\dots,n}$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ pour A. On suppose que les valeurs propres sont ordonnées : $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

1. Que vaut $y_i^T y_j$ pour $i, j = 1, \ldots, n$?
2. En utilisant la base $(y_i)_{i=1,\dots,n}$, calculez $x^T x$.
3. Calculez $x^T Ax$.
4. En déduire : $\sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{x^T Ax}{x^T x} \leq \lambda_n$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_{10}$. On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).
2. Dans le reste de cet exercice, on prend $t = 3$, $L = -10$, $U = 10$. Donner l'écart entre deux flottants successifs.
3. Donnez, en expliquant vos calculs, le résultat flottant de $10^6 - 600$.
4. Calculez l'erreur relative commise sur ce calcul. Commentez.

MT09-A2018- Examen médian

Durée : 1h30.

Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5.5 points.*

RÉDIGER LES EXERCICES 1 ET 2 SUR LA MÊME COPIE!

RÉDIGER LES EXERCICES 3 ET 4 SUR LA MÊME COPIE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 5.5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Soit n un entier strictement positif. Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ tridiagonale définie par

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix},$$

où les a_i, b_i et c_i $(i = 1, \dots, n)$ sont respectivement les composantes des vecteurs $a, b, c \in \mathbb{R}^n$.

On cherche à réaliser la factorisation $A = UL$ (attention, l'ordre est bien UL et non LU) de A, sous la forme du produit d'une matrice triangulaire supérieure U et d'une triangulaire inférieure L qui ont la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & u_{n-2} & v_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & l_{n-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

où les u_i, v_i et l_i $(i = 1, \dots, n)$ sont respectivement les composantes des vecteurs $u, v, l \in \mathbb{R}^n$.

On suppose dans tout l'exercice que la factorisation $A = UL$ est faisable sans permutation et est unique.

1. (a) En identifiant la dernière ligne de A notée $\underline{A}_n$ avec le produit UL, déterminer u_n et l_n en fonction de a_n et b_n.

   (b) Soit $i \in \{2, \dots, n-1\}$. En identifiant la ligne i de A notée $\underline{A}_i$ avec le produit UL, déterminer v_i et l_i en fonction de a_i, b_i, c_i et u_i. Déterminer également u_i en fonction de l_{i+1} et de composantes de a, b, c.

   (c) Donner ces relations pour $i = 1$.

2. (a) Écrire une fonction scilab notée
   `[u, v, l] = ULtridiag(a, b, c)`
   qui implémente cette factorisation $A = UL$.

   (b) Écrire une fonction scilab notée
   `[x] = solsuptridiag(u, v, b)`
   qui résout $Ux = b$, où la matrice triangulaire supérieure et bidiagonale U est comme dans l'équation (1).

   (c) On suppose *donnée* une fonction scilab notée
   `[x] = solinftridiag(d, l, b)`
   qui résout $Lx = b$, où la matrice triangulaire inférieure et bidiagonale L contient les vecteurs d sur la diagonale et l sous la diagonale. On ne demande **pas** d'écrire `solinftridiag`.

   En utilisant les fonctions précédentes, écrire une fonction scilab notée
   `[x] = resolULtridiag(a, b, c, y)`
   qui réalise la factorisation $A = UL$ puis qui résout le système $Ax = y$, pour un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$ donné.

3. (a) Donner le coût en nombre de multiplications et divisions de votre fonction `resolULtridiag`. (On supposera que le coût de `solinftridiag` est le même que `solsuptridiag`).

   (b) La matrice A est toujours tridiagonale. On se donne $p > 0$ vecteurs $y_i \in \mathbb{R}^n$, on veut résoudre les p systèmes $Ax_i = y_i$.

   Donner, en expliquant bien ce que vous faites, le coût minimal pour résoudre ces p systèmes.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 3 points)*
RÉDIGER SUR LA MÊME COPIE QUE L'EXERCICE 1

Soit a un réel et la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 4 & a & a \\ a & 4 & a^2/4 \\ a & a^2/4 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Réaliser la factorisation de Cholesky de A et donner les conditions sur a pour que cette factorisation soit faisable.
2. Sans calcul supplémentaire, donnez une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A soit symétrique définie positive.
3. Donner dans ce cas le déterminant de A.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5.5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Soit la suite $(V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (\begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix})_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$, définie par la relation :

$$\begin{cases} V^{(k+1)} = CV^{(k)} + d, \quad \forall k = 0, 1, \dots \qquad \text{avec } C = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } d = \dfrac{1}{2}a, \\ V^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{2}$$

où $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$.

1. La suite (2) converge-t-elle? Justifier la réponse.
2. Si la suite converge vers un vecteur $V = (x\ y)^T$, quel est le système d'équations $AV = b$ que vérifie V? On précisera la matrice $A \in \mathcal{M}_{22}$ et le second membre $b \in \mathbb{R}^2$ de ce système. (On pourra exprimer b simplement en fonction du vecteur a).
3. La suite (2) aurait pu être obtenue en appliquant une méthode itérative connue au système $AV = b$. Quelle est cette méthode? Justifier.
4. Quel théorème du cours permettrait de répondre directement à la question 1.?
5. On applique la méthode de Gauss–Seidel au système $AV = b$. Exprimer $V^{(k+1)}$ en fonction de $V^{(k)}$. On précisera ce que vaut la matrice R de l'itération de Gauss–Seidel.
6. La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle? Justifier.

Exercice 4 : *(barème approximatif : 3 points)*
RÉDIGER SUR LA MÊME COPIE QUE L'EXERCICE 3

Soit deux entiers n_1 et n_2 tous deux > 0. Soient deux matrices symétriques $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1,n_1}$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2,n_2}$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}$. On suppose de plus que A_1 est inversible.

On définit une matrice A par blocs,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & B^T \\ B & A_2 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que A est symétrique.
2. Réaliser la factorisation $A = LDL^T$ par blocs.

   On appellera $D_1 \in \mathcal{M}_{n_1,n_1}$ et $D_2 \in \mathcal{M}_{n_2,n_2}$ les deux blocs diagonaux de D.
3. On suppose que D_1 et D_2 sont symétriques définies positives. Montrer que A l'est aussi.