MT09-A2018 – Examen final – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM :	Place n° :

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours !
IL FAUT PROUVER LES RÉSULTATS AVEC SOIN!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

On cherche à calculer numériquement une solution x^* de l'équation $x^* = 2 + \ln x^*$. On utilise la méthode de point fixe, qui partant d'une valeur initiale x_0 calcule la suite $x_{n+1} = 2 + \ln x_n$.

1. Énoncer le théorème du point fixe.
2. Montrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a $2 + \ln(x) \in [2, +\infty[$.
3. Montrer que si $x_0 \in [2, +\infty[$, la suite converge.

Exercice 2 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soit $h > 0$. On pose $t_0 = 0$, $t_1 = 3h$ et $t_2 = 6h$. On se donne les valeurs y_0, y_1 et y_2 dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire le polynôme interpolant les y_i en t_i, pour $i = 0, 1, 2$, dans la base de Lagrange.
2. Soit le polynôme
$$p_y(t) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{3h}t + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{18h^2}t(t - 3h).$$
Que pouvez-vous dire sur les propriétés de ce polynôme?

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit $\omega > 0$ un réel. On se donne $m \geq 3$ points distincts tels que :
$-\frac{\pi}{2\omega} < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < 0 < t_{p+1} < t_{p+2} < \ldots < t_m < \frac{\pi}{2\omega}$. On suppose que $p \geq 1$ et $(m - p) \geq 2$.
On se donne m réels $(y_i)_{i=1,\ldots,m}$.

On veut approcher les points $(t_i, y_i)_{i=1,\ldots,m}$ au sens des moindres carrés par la courbe définie par

$$f(t) = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2(1 - \cos(\omega t)) & \text{si } t < 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 \sin(\omega t) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. Écrire le problème de moindres carrés : on demande la fonction E qu'on cherche à minimiser et la matrice A résultante.
2. Montrer que les équations normales admettent une unique solution.

MT09-A2018- Examen final
Durée : 1h30.
Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *5,5 points.*
Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Exercice 1 : *(barème approximatif : 11 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions 5, 6 et 8 sont indépendantes des questions précédentes.
La question 8 est une question de programmation en Scilab.

Soit une matrice A dans $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ avec $p \geq 1$. On suppose que A est une matrice anti-symétrique, c'est-à-dire

$$A^T = -A.$$

1. (a) Montrer que $A_{ii} = 0$, $\forall i = 1, \ldots, p$, et que $x^T A x = 0\ \forall x \in \mathbb{R}^p$.
   (b) Proposer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ anti-symétrique et inversible.
   (c) Dans la suite on suppose que A est anti-symétrique et inversible. Vérifier que $A^T A$ est symétrique définie positive.

2. Soient un réel $T > 0$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ anti-symétrique et inversible. On considère le problème différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & A\,x(t), \quad \forall t \in]0, T[\\ x(0) & = & x^0, \end{array}\right. \tag{1}$$

   où x^0 est un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Soit $E(x) = \|x\|_2^2/2$.

   (a) Montrer que $\dfrac{d}{dt}(E(x(t))) = \langle x'(t), x(t)\rangle = x(t)^T x'(t)$.
   (b) En déduire que $\dfrac{d}{dt}(E(x(t))) = 0$. Que vaut $E(x(t))$?

3. Soit un entier $N > 0$. On introduit le pas $h = T/N$ et les points $t_n = nh$ pour $n = 0, \ldots, N$.
   (a) Écrire le schéma d'Euler explicite pour le problème différentiel. On l'écrira sous la forme

$$z_{n+1} = z_n + h\phi(z_n, h, t_n)$$

   où l'on donnera l'expression de $\phi(z, h, t)$.

   (b) Montrer que

$$\langle z_{n+1}, z_n\rangle = \langle z_n, z_n\rangle.$$

   (c) Montrer que pour le schéma d'Euler explicite on a

$$E(z_{n+1}) > E(z_n) \qquad \forall z_n \neq 0.$$

   (d) Soit une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ symétrique, dont on note $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_p$ les valeurs propres. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\} \qquad \frac{x^T B x}{x^T x} \geq \mu_1$$

   (e) Soit $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_p$ les valeurs propres de $A^T A$. Montrer que

$$E(z_{n+1}) \geq \left(1 + h^2 \lambda_1\right) E(z_n)$$

   (f) En déduire que pour $x^0 \neq 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} E(z_n) = +\infty.$$

4. Écrire le schéma d'Euler implicite et montrer que $E(z_{n+1}) < E(z_n)$ pour ce schéma.

5. Soit $f : [0, T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une fonction C^∞. On considère le θ-schéma suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_{n+1} & = & z_n + h\left[\theta f(t_n, z_n) + (1-\theta) f(t_{n+1}, z_{n+1})\right], \quad \forall n = 0, 1, \ldots \\ z_0 & = & x^0 \end{array}\right. \tag{2}$$

   où $\theta \in [0, 1]$ est un paramètre scalaire.

(a) Écrire l'erreur de troncature locale.

(b) Déterminer, en fonction des valeurs de θ, l'ordre du θ-schéma.

6. Dans cette question uniquement, on prend $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(p = 1)$ et $f(t,u) = -\alpha u$, où $\alpha > 0$. Déterminer, en fonction de θ, les valeurs de h pour lesquelles le schéma est stable.

7. Dans cette question, on prend $f : [0,T] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ telle que $f(t,u) = Au$, où A est anti-symétrique inversible.

   (a) Écrire le θ-schéma dans ce cas.

   (b) En multipliant cette relation par $\frac{1}{2}(z_{n+1} + z_n)^T$, écrire une relation entre $E(z_{n+1})$, $E(z_n)$, qui fait intervenir uniquement $\langle Az_n, z_{n+1}\rangle$, h et θ.

   (c) Quelle valeur de $\theta \in [0,1]$ semble intéressante ? Expliquer pourquoi. Le schéma est-il stable dans ce cas? De quel ordre est-il?

8. **Programmation** scilab **:** on veut implémenter le θ-schéma (2) en utilisant la méthode du point fixe.

   (a) Écrire la fonction $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ dont on veut trouver le zéro à chaque pas de temps.

   (b) Écrire une fonction scilab
   `[y, k] = pointfixe(f, y0, Kmax, tol, theta, ...)`
   qui implémente la méthode de point fixe pour résoudre $\Phi(y^\star) = 0$. On précisera bien tous les arguments de cette fonction (dont on ne donne ici que les premiers termes).

   (c) Écrire une fonction scilab
   `[X] = thetaschema(f, x0, T, N, theta, ...)`
   qui implémente le θ-schéma (2) en utilisant la méthode du point fixe.

Exercice 2 *(barème approximatif : 7,5 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les questions 2 et 3 sont largement indépendantes les unes des autres.

Lorsque le calcul est effectué à l'aide de nombres flottants, la précision relative est fixée à $\epsilon_{\mathbf{mach}} = 5 \times 10^{-3}$. En arithmétique flottante, on a $\mathrm{fl}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0.707$ et donc $\mathrm{fl}(0.707 \times 0.707) = 0.5$.

On pose $\epsilon = 10^{-2}$, on a donc $\mathrm{fl}(1 + \epsilon^2) = 0.1 \times 10^{-1} = 1$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$

1. (a) Dans cette question uniquement, on suppose que l'on travaille en arithmétique exacte.
   Quel est le rang de A? En déduire que $A^T A$ est inversible.

   (b) En arithmétique flottante, déterminer $\mathrm{fl}(A^T A)$. Est-il possible de factoriser cette matrice par la méthode de Cholesky?

2. Le but est de construire une base orthonormée de $\mathrm{Im}(A)$ par le procédé de Schmidt.

   (a) Normaliser A_1 et calculer $q_1 = \mathrm{fl}(A_1/\|A_1\|)$.

   (b) Calculer, en nombres flottants, q_2 en fonction de A_2 et q_1.
   Calculer en nombres flottans q_3 en fonction de A_3, q_1 et q_2.
   —Procéder en deux étapes : orthogonalisation et normalisation.

   (c) Exprimer A_1, A_2 et A_3 comme combinaisons linéaires de q_1, q_2 et q_3. En déduire la décomposition $A = QT$, T une matrice triangulaire supérieure et Q est la matrice contenant q_1, q_2 et q_3 en colonnes.

   (d) Vérifier que $(q_2)^T q_3 = 0.5$. Q est-elle orthogonale? Conclure sur le procédé de Schmidt en tant que méthode numérique de factorisation.

3. On réalise les premières étapes de la factorisation $A = QR$ en utilisant les transformations de Householder.

   (a) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\|u\|_2 = 1$. Donner l'expression de la matrice de Householder associée à u. Déterminer H^T et H^{-1}.

   (b) En arithmétique flottante, déterminer la matrice de Householder $H^{(1)}$ utilisée pour la première étape de QR. On précisera bien le vecteur $u^{(1)}$ associé à $H^{(1)}$ en fonction de q_1 et du premier vecteur de la base canonique.

   (c) Déterminer $A^{(1)} = H^{(1)} A$. Que remarque-t-on sur la première colonne de $A^{(1)}$? Est-ce normal?

   (d) Écrire la transformation $U^{(2)}$ qui réalise la seconde étape de QR et la matrice $A^{(2)} = U^{(2)} A^{(1)}$.
   On précisera bien la matrice de Householder $H^{(2)}$ utilisée.
   Commenter sur $A^{(2)}$.