MT09-A2019 – Examen médian – Questions de cours

Durée : 30mn. Sans documents ni outils électroniques – Rédiger sur l'énoncé

NOM PRÉNOM : Place n^o:

ATTENTION, il y a 3 exercices indépendants pour cette partie questions de cours!

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soient A une matrice réelle carrée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ $(n > 0)$.

1. Vérifier que A^TA est symétrique, semi-définie positive et que :
$$A^TA \text{ définie positive } \Longleftrightarrow A \text{ inversible.}$$
2. Montrer que $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$.
3. Que se passe-t-il si A est symétrique ? Que vaut alors $|||A|||_2$?
4. Soit U une matrice orthogonale, c'est-à-dire qu'elle vérifie $U^TU = UU^T = I$.
Calculer $|||U|||_2$. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n, \qquad |||UA|||_2 = |||AU|||_2 = |||A|||_2$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $\hat{x} \in \mathbb{R}$. On suppose en outre qu'il existe une constante $0 < \lambda < 1$ telle que
$$\forall n = 1, 2, \ldots, \quad |x_{n+1} - x_n| \le \lambda |x_n - x_{n-1}|.$$

1. En déduire que
$$\forall n = 0, 1, 2, \ldots, \quad |x_{n+1} - x_n| \le \lambda^n |x_1 - x_0|.$$
2. Soit p un entier supérieur à n. En déduire une majoration de $|x_p - x_n|$ en fonction de $|x_1 - x_0|$
3. On rappelle l'identité suivante : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \lambda^i = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$. En déduire une nouvelle majoration de $|x_p - x_n|$.
4. En faisant alors tendre p vers l'infini, en déduire une majoration de l'erreur $|\hat{x} - x_n|$ en fonction de λ, n et $|x_1 - x_0|$.

Exercice 3 *(barème approximatif : 2 points)*

1. Définir l'ensemble des flottants $\mathcal{F}_2$. On expliquera ce que signifie les constantes t, L et U (notations du cours).
w
2. Donner la valeur de $\varepsilon_{\text{mach}}$.
3. On rappelle la valeur des premières puissances de 2 :

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

On prend $t = 4$. On pose $x = 2^{10}$. On note y le flottant de $\mathcal{F}_2$ qui suit immédiatement x. Que vaut y? Quel est l'écart relatif entre x et y? Est-ce cohérent avec $\varepsilon_{\text{mach}}$?

4. On prend $t = 4$. Calculer $z = (x \oplus 100) \ominus x$ en opération flottante et déterminer l'erreur relative qui est faite sur ce calcul. On indique que $100 = 64 + 32 + 4$

MT09-A2019- Examen médian

Durée : 1h30.

Polycopiés de cours et scilab autorisés - pas d'outils numériques

Questions de cours déjà traitées : environ *6 points.*

RÉDIGER CHAQUE EXERCICE SUR UNE COPIE DIFFÉRENTE!

Exercice 1 : *(barème approximatif : 7 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Il est possible de traiter une question en admettant les résultats précédents.

Soit n un entier strictement positif. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

On pose $A^{(1)} = A$.

On veut faire l'élimination de Gauss en partant de la dernière colonne et de la dernière ligne et en remontant. Le premier pivot sera donc $a^{(1)}_{n,n}$ et la matrice $A^{(2)}$ après la première étape contiendra des zéros dans la dernière colonne : $a^{(2)}_{i,n} = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

On suppose dans tout l'exercice que les pivots sont non-nuls.

1. Écrire les relations sur les lignes pour calculer $\underline{A}^{(2)}_i$ pour $i = n$ à 1.

   On posera $l_{i,n} = \dfrac{a^{(1)}_{i,n}}{a^{(1)}_{n,n}}$ si $i \leq n-1$.

2. Même question pour $A^{(3)}$ (deuxième étape).

3. Écrire les relations sur les lignes pour calculer $\underline{A}^{(k+1)}_i$ pour $i = 1$ à n.
   On introduira des $l_{i,j}$ pour un certain j à préciser.

4. On fixe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et on regarde la ligne i de A quand les itérations k varient de 1 à $n-1$.

   (a) Écrire toutes les égalités que vérifie $\underline{A}^{(k+1)}_i$ en fonction de $\underline{A}^{(k)}_i$ pour $k = 1$ à $n-1$.

   (b) Sommer ces équations et simplifier le résultat de façon à ne faire apparaître que des lignes de A et de $A^{(n)}$.

   (c) En introduisant une matrice L à définir, écrire la relation matricielle qui relie L, A et $A^{(n)}$.
   Expliciter quels sont les termes nuls des matrices L et $A^{(n)}$.

5. Écrire la fonction `scilab` correspondant à cet algorithme : `function [L, An] = factor(A)`.

6. Calculer son coût en nombre de multiplications (on ne gardera que les termes dominants quand n tend vers l'infini).

   On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2 : *(barème approximatif : 9 points)* **CHANGEZ DE COPIE**

Les parties 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.
La question 11 (programmation) peut être traitée sans avoir fait la partie 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On appelle $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice qui transforme A en la matrice diagonale $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de A sont ordonnées de telle sorte que : $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. On note $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ la base des vecteurs propres correspondants.

Partie 1

Soit $q \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|q\|_2 = 1$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose $r = Aq - \mu q$.
On supose dans cette partie qu'il existe i_0 dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $0 < |\lambda_{i_0} - \mu| < |\lambda_i - \mu|$ pour tout $i \neq i_0$.

1. Montrer que $\Lambda - \mu I$ est inversible.
2. Montrer que $q = P(\Lambda - \mu I)^{-1} P^{-1} r$.
3. Soit une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Calculer $|||D|||_2$.
4. Déduire des questions précédentes que
$$|\lambda_{i_0} - \mu| \leq \chi_2(P)\|r\|_2, \tag{1}$$
où $\chi_2(P)$ est le conditionnement par rapport à la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$.
5. Dans cette question uniquement, on suppose que A est symétrique. Quel est le conditionnement minimal que peut prendre P? Que devient l'inégalité (1)?
6. (a) Si (μ, q) est un couple propre (λ_i, y_i), que vaut r? L'inégalité (1) reste-t-elle valide?
   (b) Quel type de critère d'arrêt pour la méthode des puissances itérées l'inégalité (1) suggère-t-elle d'utiliser? Expliquer.

Partie 2

On suppose dans cette partie que $\lambda_1 = -\lambda_2 > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. On considère la méthode suivante : $x^{(0)}$ donné dans $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et

$$\text{pour } k \geq 0 \quad \begin{cases} u^{(k)} = Ax^{(k)}, \\ x^{(k+1)} = \dfrac{u^{(k)}}{\|u^{(k)}\|_2}, \\ \mu^{(k+1)} = (x^{(k+1)})^T A x^{(k+1)}. \end{cases} \tag{2}$$

7. (a) Calculer $\dfrac{y_j^T A y_j}{y_j^T y_j}$ pour $j = 1, \ldots, n$.
   (b) Si $\lim\limits_{k \to +\infty} u^{(k)} = \gamma y_j$ (pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$), que vaut $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu^{(k)}$?
8. Soit $k \geq 1$.
   (a) Écrire $x^{(0)}$ dans la base des vecteurs propres.
   On suppose dans toute la suite que les composantes de $x^{(0)}$ suivant y_1 et y_2 sont non nulles.
   (b) Calculer $A^k x^{(0)}$.
   (c) Montrer que $A^k x^{(0)} \neq 0$.
   (d) Calculer $x^{(k)}$ en fonction de $A^k x^{(0)}$. La suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ admet-elle une limite quand $k \to \infty$?
9. (a) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{A^{2k} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k}}$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{A^{2k+1} x^{(0)}}{\lambda_1^{2k+1}}$.
   (b) Pour $k \geq 1$, on pose $v^{(k)} = A^k x^{(0)}$. Calculer $w^{(k)} = v^{(k)} + \lambda_1 v^{(k-1)}$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2}$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{(w^{(k)})^T A w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_2^2}$.
10. Modifier la méthode (2) pour calculer λ_1 et y_1. Bien expliquer.
11. Écrire une fonction `scilab` : `function [mu, x, k] = puissiterbis(A, x, N, tol)`
qui calcule λ_1 et y_1 **en utilisant la méthode** (2) **modifiée**. On explicitera les arguments d'entrée `x`, `N`, `tol` et l'argument de sortie `k`.
On utilisera de préférence le critère d'arrêt suggéré à la fin de la partie 1.