Exercices du chapitre 1 avec corrigé succinct

Exercice I.1 Ch1-Exercice 1
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ représentent les ensembles des nombres entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, $+$ et $\times$ sont l'addition et la multiplication.
$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\times)$, $(\mathbb{Z},\times)$, $(\mathbb{Z},-)$, $(\mathbb{Q},\times)$, $(\mathbb{Q}^+,\times)$,$(\mathbb{Q}^*,\times)$ ont-ils des structures de groupe ?

Solution : $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\times)$, $(\mathbb{Z},\times)$: non car pas de symétrique.
$(\mathbb{Z},-)$: non car $-$ pas associative.
$(\mathbb{Q},\times)$, $(\mathbb{Q}^+,\times)$: non car 0 n'a pas de symétrique.
Mais $(\mathbb{Q}^*,\times)$ oui.

Exercice I.2 Ch1-Exercice 2
Soit $\mathscr{P}_n$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $(\mathscr{P}_n,+)$ est un groupe commutatif. Qu'en est-il pour $(\mathscr{P}_n,\times)$?

Solution : $(\mathscr{P}_n,+)$ est un groupe car la loi est de composition interne, associative, le polynôme nul est élément neutre, $(-p)$ est le polynôme symétrique de p.
$(\mathscr{P}_n,\times)$ n'est pas un groupe car la loi n'est pas de composition interne.

Exercice I.3 Ch1-Exercice 3
Dans chacun des cas suivants dire si E est un espace vectoriel sur K (les lois sont l'addition et le produit par un scalaire) :

1. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles, continues, positives ou nulles.

2. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles, continues.

3. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles vérifiant $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

4. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des éléments (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

5. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des réels solutions de l'équation $\cos x = 0$

6. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles continues vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 0$.

7. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles continues vérifiant $f(\frac{1}{2}) = 1$.

8. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles impaires.

9. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles paires.

10. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, vérifiant

$$f(a) = \int_a^b t^3 f(t)\,dt.$$

11. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$, vérifiant
$$f(a)=\int_a^b tf^3(t)dt.$$
12. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des polynômes réels de degré exactement n.

13. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des polynômes ne comportant pas de terme de degré sept.

14. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des fonctions réelles dérivables vérifiant $f'+f=0$.

15. K=$\mathbb{R}$, E est l'ensemble des primitives de la fonction xe^x sur $\mathbb{R}$.

16. K=$\mathbb{C}$, E est l'ensemble des nombres complexes d'argument $\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Solution : Voir le corrigé avec l'exercice I.4.

Exercice I.4 Ch1-Exercice 4
Les ensembles E de l'exercice I.3 sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Si oui de quel espace vectoriel ?

Solution :
1. non, si $\lambda\in\mathbb{R}^-$, $\lambda f\notin E$.
2. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
3. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
4. oui, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et plus précisément de $vect<(\frac{10}{7},\frac{13}{7},1)>$ (voir la notion de sous-espace vectoriel engendré).
5. non, par exemple $\frac{\pi}{2}\in E,\frac{3\pi}{2}\in E$ mais $2\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\notin E$.
6. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
7. non, + n'est pas une loi de composition interne.
8. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
9. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
10. oui, sous-espace vectoriel des fonctions continues.
11. non, + n'est pas une loi de composition interne, par exemple $(f+g)^3\neq f^3+g^3$.
12. non, + n'est pas une loi de composition interne, par exemple $t^n+(-t^n+1)\notin P_n$.
13. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des polynômes.
14. oui, sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions réelles.
15. non, + n'est pas une loi de composition interne.
16. non, $E=\{z\in\mathbb{C},z=a+ia,a\in\mathbb{R}\}$, si on a $\lambda\in\mathbb{C},\lambda=i$ par exemple, alors $\lambda z=ia-a\notin E$.
    Par contre si on considère $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ alors E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, on montre en effet facilement que si $z_1,z_2\in E,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, alors $\lambda_1z_1+\lambda_2z_2\in E$.

Exercice I.5 Ch1-Exercice 5
Montrer que :
– E et $\{\vec{0}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E
– Tous les sous-espaces vectoriels contiennent $\{\vec{0}\}$

Solution : Evident, il suffit de vérifier les propriétés caractéristiques d'un sous-espace vectoriel.

Exercice I.6 Ch1-Exercice 6

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dans les cas suivants :

1. F : ensemble des suites convergentes, E : ensemble des suites réelles.
2. $F = \mathscr{C}^1[0,1]$ ensemble des fonctions continûment différentiables sur $[0,1]$, $E = \mathscr{C}^0[0,1]$.
3. F est l'ensemble des $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ de la forme :
   $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0), p < n$, $E = \mathbb{R}^n$.
   On remarque que F peut être identifié à $\mathbb{R}^p$ par la bijection suivante : à tout $\vec{x} \in F$ on associe le vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^p$ par :
   $$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0),\ \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_p).$$
4. $F = \{\vec{y} \in E / \vec{y} = \lambda.\vec{x}, \lambda \in K\}$, où $\vec{x}$ est un vecteur non-nul de E (F est dit **droite vectorielle** engendrée par $\vec{x}$).

Solution : On vérifie que $F \neq \emptyset$ et que F est stable.
Pour 4) dans le cas particulier $\vec{x} = \vec{0}, F = \{\vec{0}\}$, c'est bien sûr un sous-espace vectoriel mais ce n'est pas une droite vectorielle.

Exercice I.7 Ch1-Exercice 7

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que l'ensemble H défini par $H = \{\vec{x} \in E |\ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} \in F, \vec{z} \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E. H est noté $F + G$.

Solution : H est non vide puisque $0 = 0 + 0$ appartient à H.
On montre que H est stable, en effet si $\vec{x}_1 \in H, \vec{x}_2 \in H$, on a $\vec{x}_1 = \vec{y}_1 + \vec{z}_1, \vec{x}_2 = \vec{y}_2 + \vec{z}_2$ donc $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) + (\vec{z}_1 + \vec{z}_2) \in H$. On a utilisé l'associativité et la commutativité de la loi + et la stabilité des sous-espaces vectoriels F et G. On effectue un raisonnement similaire avec la loi externe.

Exercice I.8 Ch1-Exercice 8

Montrer que $F + F = F$.

Solution : Si $\vec{x} \in F$, on peut écrire $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0}$ donc $\vec{x} \in F + F$. On a donc démontré que : $F \subset F + F$.
Réciproquement si $\vec{x} \in F + F, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ donc $\vec{x} \in F$ ce qui démontre que $F + F \subset F$.
On a donc $F = F + F$.

Exercice I.9 Ch1-Exercice 9

1. F est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1,0)$, G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(0,1)$.
   – A-t-on une somme directe ?
   – F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?
2. F est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1,1)$, G est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(0,1)$.
   – Montrer que F et G sont en somme directe. On note $H = F \oplus G$.
   – Pour chaque élément $\vec{x} = (x_1, x_2)$ de H donner sa décomposition unique sur F et G, c'est-à-dire trouver le couple $\vec{y} \in F, \vec{z} \in G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
   – F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

Solution :

1. – somme directe car $F \bigcap G = \{\vec{0}\}$
   – F et G supplémentaires.
2. – $\vec{x} \in F \bigcap G \Longleftrightarrow \vec{x} = (\alpha, \alpha) = (0, \beta) \Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = 0$. Donc F et G sont en somme directe. On notera donc la somme $F \oplus G$.

- Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, alors $\vec{x} = (x_1, x_2) = (x_1, x_1 + (x_2 - x_1)) = (x_1, x_1) + (0, x_2 - x_1)$.
  Or $(x_1, x_1) \in F, (0, x_2 - x_1) \in G$, on vient donc de démontrer que $\mathbb{R}^2 \subset F \oplus G$.
- Bien sûr on avait que $F \oplus G \subset \mathbb{R}^2$.
  On a donc $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$, donc F et G sont supplémentaires.

Exercice I.10 Ch1-Exercice 10

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit les vecteurs
   $\vec{v}_1 = (1,1),\ \vec{v}_2 = (0,1),\ \vec{v}_3 = (2,2), \vec{v}_4 = (1,0),\ \vec{v}_5 = (2,3)$.
   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est liée ou libre :
   $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}, \{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}, \{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}, \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs
   $\vec{w}_1 = (1,1,1),\ \vec{w}_2 = (1,0,0), \vec{w}_3 = (1,1,0),\ \vec{w}_4 = (0,0,1),\ \vec{w}_5 = (2,2,0)$.
   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est liée ou libre :
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}, \{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}, \{\vec{w}_5, \vec{w}_3, \vec{w}_1\}, \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$.

3. Dans un espace vectoriel quelconque montrer que deux vecteurs non nuls sont indépendants si et seulement si ils ne sont pas colinéaires. Donner un exemple prouvant que ce résultat est faux pour trois vecteurs.

Solution :

1. - $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2 = (0,0) \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre.
   - $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_3 \vec{v}_3 = (\lambda_1 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_3 = (0,0)$ est possible avec $\lambda_1 = -2, \lambda_3 = 1$ donc la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ est liée.
   - On montre de même que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$est libre.
   - $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$ est bien sûr liée puisque $\vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{0}$!
   - $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 = (0,0)$ avec par exemple : $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ donc la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est liée, ce résultat plus général sera démontré plus loin. Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
   - $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ est liée (on peut choisir par exemple $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_5 = 1$).
2. - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}$ est libre, $\{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}$ est libre, $\{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}$ est liée,$\{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$ est libre, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est libre.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est liée (prendre par exemple $(\lambda_1 = 1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -1)$.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_5\}$ est liée, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4, \vec{w}_2\}$ est liée : ce sont des sur-familles de familles liées.
3. On montre que $\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}$ liée$\Longleftrightarrow$ $\vec{z}_1, \vec{z}_2$ sont colinéaires. Le résultat est faux avec 3 vecteurs, en effet la famille $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est liée et les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice I.11 Ch1-Exercice 11

Montrer les propriétés suivantes :

1. $S = \{\vec{x}\}$ est liée si et seulement si $\vec{x} = \vec{0}$.
2. Une famille de 2 vecteurs ou plus est liée si et seulement si un (au moins) des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres.
3. Si deux vecteurs d'une famille $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ sont égaux (par exemple $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$) alors la famille S est liée.
4. Si l'un quelconque des vecteurs de S est le vecteur nul, alors S est liée.
5. Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est <u>liée</u> et si $\vec{v}$ est un vecteur quelconque de E, alors $S \cup \{\vec{v}\}$ est liée. Autrement dit, toute sur-famille d'une famille liée est liée.
6. Si $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est <u>libre</u>, la famille $\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est libre. Autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Solution :

1. Raisonnons par double implication : soit $S = \{\vec{0}\}$, on sait d'après la propriété de la loi externe que $1\vec{0} = \vec{0}$, donc il existe bien un coefficient non nul $\lambda = 1$ tel que $\lambda\vec{0} = \vec{0}$.

   Réciproquement : si $S = \{\vec{x}\}$ est liée, alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda\vec{x} = 0$ donc d'après la proposition 1.1.2 $\vec{x} = \vec{0}$.

2. Raisonnons par double implication : Si la famille $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ est liée, alors il existe des coefficients non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ tels que $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$, supposons que $\lambda_k \neq 0$, alors $\lambda_k\vec{v}_k = -\lambda_1\vec{v}_1 - \lambda_2\vec{v}_2 - \ldots - \lambda_{k-1}\vec{v}_{k-1} - \lambda_{k+1}\vec{v}_{k+1} - \ldots - \lambda_p\vec{v}_p$, il suffit alors de diviser par λ_k qui est non nul pour obtenir le résultat.

   Réciproquement, s'il existe un vecteur combinaison linéaire des autres, par exemple $\vec{v}_k$, alors $\vec{v}_k = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\vec{v}_{k-1} + a_{k+1}\vec{v}_{k+1} + \ldots + a_p\vec{v}_p$, donc $a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_{k-1}\vec{v}_{k-1} - \vec{v}_k + a_{k+1}\vec{v}_{k+1} + \ldots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$. On a donc trouvé une combinaison linéaire nulle avec des coefficients non tous nuls ($\lambda_k = -1$), ce qui prouve que la famille est liée.

3. $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \ldots + 0\vec{v}_p = \vec{0}$, $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1)$: la famille est liée.
4. Si $\vec{v}_1 = \vec{0}$ on a $1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_p = \vec{0}$, $(\lambda_1 = 1)$: la famille est liée.
5. Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est liée,

   alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$

   on a donc $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_p\vec{v}_p + 0\vec{v} = \vec{0}$, la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p, \vec{v}\}$ est donc liée.
6. si $\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ était liée alors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ serait liée car sur-famille, ce n'est pas le cas donc $\{\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ est libre : toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Exercice I.12 Ch1-Exercice 12

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs
$\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$, $\vec{w}_3 = (1,1,0)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$.

1. Trouver la décomposition unique du vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sous la forme $\vec{x} = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3$.
2. Trouver pour ce même vecteur deux décompositions sous la forme $\vec{x} = \lambda_1\vec{w}_1 + \lambda_2\vec{w}_2 + \lambda_3\vec{w}_3 + \lambda_4\vec{w}_4$.

Solution :

1. On a $\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & = & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 \\ x_2 & = & \lambda_1 & & +\lambda_3 \\ x_3 & = & \lambda_1 & & \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1 & = & x_3 \\ \lambda_2 & = & x_1 - x_2 \\ \lambda_3 & = & x_2 - x_3 \end{array}\right.$
2. On a par exemple $\vec{x} = x_3\vec{w}_1 + (x_1 - x_2)\vec{w}_2 + (x_2 - x_3)\vec{w}_3 + 0\vec{w}_4 = \frac{x_3}{2}\vec{w}_1 + (x_1 - x_2)\vec{w}_2 + (x_2 - \frac{x_3}{2})\vec{w}_3 + \frac{x_3}{2}\vec{w}_4$

Exercice I.13 Ch1-Exercice 13

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit les vecteurs

   $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_3 = (2,2)$, $\vec{v}_4 = (1,0)$, $\vec{v}_5 = (2,3)$.

   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est génératrice :

   $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs

   $\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$, $\vec{w}_3 = (1,1,0)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$, $\vec{w}_5 = (2,2,0)$.

   Pour chacune des familles suivantes dire si elle est génératrice :

   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_5, \vec{w}_3, \vec{w}_1\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$.

3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit $F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une famille génératrice de F.

Solution :

1. Si $\vec{x} = (x_1, x_2)$, on peut écrire :
   - $\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_2$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est génératrice.
   - $\vec{x} = (3x_1 - 2x_2)\vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_5$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$ est génératrice.
   - $\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est génératrice.
   - $\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + (x_2 - x_1)\vec{v}_2 + 0\vec{v}_5$ donc $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ est génératrice.
   - Bien sûr $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$ n'est pas génératrice.
2. - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$ ne sont pas génératrices.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est génératrice.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_5\}$ ne sont pas génératrices.
   - $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est génératrice. On va montrer le résultat plus général suivant : toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Exercice I.14 Ch1-Exercice 14

Montrer la propriété suivante : Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice d'un espace vectoriel E et si $\vec{x}$ est un vecteur quelconque de E, alors $\mathcal{G} \cup \{\vec{x}\}$ est encore une famille génératrice de E.

Solution : Si on note $\mathcal{G} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p\}$, alors $\forall \vec{y} \in E$ on a $\vec{y} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p \vec{e}_p$.
Donc $\vec{y} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \ldots + \lambda_p \vec{e}_p + 0\vec{x}$

Exercice I.15 Ch1-Exercice 15

Montrer que $vect < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n >$ est un sous-espace vectoriel de E.

Solution : $F = \text{vect} < \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n > \Longrightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 \in F \text{ donc } F \text{ n'est pas vide} \\ F \text{ est stable} \end{cases}$ F est donc un sous-espace vectoriel.

Exercice I.16 Ch1-Exercice 16

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit les vecteurs
   $\vec{v}_1 = (1,1)$, $\vec{v}_2 = (0,1)$, $\vec{v}_3 = (2,2)$, $\vec{v}_4 = (1,0)$, $\vec{v}_5 = (2,3)$.
   Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$:
   $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit les vecteurs
   $\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$, $\vec{w}_3 = (1,1,0)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$, $\vec{w}_5 = (2,2,0)$.
   Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$:
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_5, \vec{w}_3, \vec{w}_1\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$.

3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on définit $F = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$. Déterminer une base de F.

Solution :

1. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \{\vec{v}_1, \vec{v}_5\}$ sont des bases
   $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_1\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ ne sont pas des bases car elles ne sont pas libres.
2. $\{\vec{w}_1, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_2, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_3, \vec{w}_5\}, \{\vec{w}_4, \vec{w}_5\}$ ne sont pas des bases car pas génératrices.
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est une base.
   $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \vec{w}_5\}$, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ ne sont pas des bases car pas libres.

3. $\vec{x} \in F \Longleftrightarrow x_2 = -2x_1 - 3x_3 \Longleftrightarrow \vec{x} = (x_1, -2x_1 - 3x_3, x_3) = x_1(1,-2,0) + x_3(0,-3,1)$. Donc les vecteurs de F, $\vec{v}_1 = (1,-2,0)$, $\vec{v}_2 = (0,-3,1)$ forment une famille génératrice de F. D'autre part on montre facilement que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est libre : c'est donc une base de F.

Exercice I.17 Ch1-Exercice 17

Soit E un espace vectoriel, $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E et (x_1, x_2, x_3) les composantes du vecteur $\vec{x}$ sur $\mathscr{E}$.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 = 1\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2^2 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 1\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$
   - $F = \{\vec{x} \in E | x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$
2. Lorsque F est un sous-espace vectoriel déterminer une base de F.

Solution : $F = \{\vec{x} \in E, x_1 = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel, $(\vec{0} \notin F)$.
$F = \{\vec{x} \in E, x_1 + x_2^2 = 0\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
$F = \{\vec{x} \in E, x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.
$F = \{\vec{x} \in E, x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel , on a $F = \{\vec{0}\}$.

$$F = \{\vec{x} \in E, x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0\} = \{\vec{x} \in E, x_1 = x_3, x_2 = -2x_3\} =$$
$$\{\vec{x} \in E, \vec{x} = x_3(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = vect < (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3) >:$$

F est un sous-espace vectoriel, c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$

$$F = \{\vec{x} \in E, x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_2 + x_3 = 0\} = \{\vec{x} \in E, x_1 = -x_2, x_3 = 2x_2\} =$$
$$\{\vec{x} \in E, \vec{x} = x_2(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = vect < (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) >:$$

F est un sous-espace vectoriel, c'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$

$$F = \{\vec{x} \in E, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\} = \{\vec{x} \in E, x_1 = -2x_2 - x_3\} =$$
$$\{\vec{x} \in E, \vec{x} = x_2(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + x_3(-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = vect < (-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2), (-\vec{e}_1 + \vec{e}_3) >:$$

F est un sous-espace vectoriel, c'est le plan vectoriel engendrée par les vecteurs $(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2), (-\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$

Exercice I.18 Ch1-Exercice 18

1. Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs
   $\vec{w}_1 = (1,1,1)$, $\vec{w}_2 = (1,0,0)$, $\vec{w}_3 = (0,1,1)$, $\vec{w}_4 = (0,0,1)$,
   la famille $\mathscr{G} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ est génératrice, la famille $\mathscr{L} = \{\vec{w}_2\}$ est libre. Déterminer une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs $\vec{w}_1 = (1,1,-1)$, $\vec{w}_2 = (1,1,1)$, $\vec{w}_3 = (2,2,3)$. Montrer que la famille $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est liée et que la famille $\mathscr{L} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre. Déterminer une base $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{E}$.

Solution :

1. $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_4\}, \{\vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ répondent à la question.
2. $\frac{1}{2}\vec{w}_1 - \frac{5}{2}\vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{0}$: donc $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ est liée. On montre facilement que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ est libre. On peut définir $\vec{w}_4 = (1,0,0)$ par exemple alors $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_4\}$ est libre et est génératrice donc c'est une base.

Exercice I.19 Ch1-Exercice 19

Quelles sont les dimensions des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^n, \mathscr{P}_n$?

Solution : $\mathbb{R}^n$ est de dimension n, $\mathscr{P}_n$ est de dimension $n+1$.

Exercice I.20 Ch1-Exercice 20

Reprendre les exercices I.10, I.13, I.15 et essayer de répondre plus rapidement à certaines questions en utilisant la notion de dimension.

Solution : Les propriétés de la dimension auraient permis de répondre beaucoup plus rapidement à certaines questions des exercices I.10, I.13, I.15. Par exemple dans ces exercices la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_3, \vec{y}_4, \vec{y}_2\}$ est forcément liée puisque $\mathbb{R}^3$ a pour dimension 3, donc il n'existe pas de famille libre ayant strictement plus de 3 éléments. De même la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_5\}$ ne peut être génératrice puisque dans un espace vectoriel de dimension 3 toute famille génératrice a au moins 3 éléments. De même dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2, la famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ ne peut être une base puisque toute base d'un espace vectoriel de dimension 2 possède exactement 2 éléments.Reprenez ces exercices et voyez s'il était possible de conclure plus rapidement.
