MT23-Algèbre linéaire

Chapitre 2 : Applications linéaires et matrices

ÉQUIPE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

UTC

février 2016

Chapitre 2

Applications linéaires et matrices

2.1 Applications linéaires

2.1.1 Application linéaire - définition

Exercices :
Exercice A.1.1

Dans tout ce chapitre E, F, G désignent des espaces vectoriels (en général de dimensions finies) sur un <u>même</u> corps K.

Définition 2.1.1. *On appelle* **application linéaire** $u : E \to F$*, une application de* E *dans* F *possédant les propriétés suivantes :*
– $u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E,$
– $u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \qquad \forall \vec{x} \in E, \ \forall \lambda \in K.$
On notera $\mathscr{L}(E;F)$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *dans* F*.*

L'application nulle qui à tout $\vec{x}$ associe le vecteur nul est bien sûr linéaire.

L'image par u du vecteur nul de E est toujours le vecteur nul de F : il suffit de choisir $\lambda = 0$ et l'on a $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe e^x n'est pas linéaire, par contre l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $3x$ est linéaire.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.2 Espace vectoriel $\mathscr{L}(E;F)$

On peut définir la somme de deux applications u et v de $\mathscr{L}(E;F)$ par

$$(u \hat{+} v)(\vec{x}) = u(\vec{x}) + v(\vec{x}),$$

On peut alors vérifier que :
- $u \hat{+} v \in \mathscr{L}(E;F)$, donc $\hat{+}$ est une loi interne dans $\mathscr{L}(E;F)$.
- $\hat{+}$ est associative et commutative. Pour le démontrer, il suffit d'utiliser l'associativité et la commutativité de la loi $+$ dans F.
- l'application linéaire nulle est élément neutre.
- Pour toute application linéaire u, si on définit $\tilde{u}$ par $\tilde{u}(x) = -u(x)$, on peut vérifier que $\tilde{u} \in \mathscr{L}(E;F)$ et que, de plus, $u \hat{+} \tilde{u}$ est égale à l'application nulle.

$\mathscr{L}(E;F)$ muni de $\hat{+}$ a donc une structure de groupe commutatif.

Par ailleurs on peut définir la multiplication de u par un scalaire λ appartenant à K :

$$(\lambda u)(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}).$$

Cette loi vérifie les 4 propriétés de la loi externe d'un espace vectoriel.

L'ensemble $\mathscr{L}(E;F)$ muni des 2 lois précédentes a donc une structure d'espace vectoriel sur K.

On parlera dans la suite, de **l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F**. La loi $\hat{+}$ sera notée $+$.

2.1.3 Noyau et image d'une application linéaire

Exercices :
Exercice A.1.2
Exercice A.1.3

Définition 2.1.2. *Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$,*

– *on appelle* **noyau** *de u, et on note* Ker u*, le sous-ensemble de E défini par :*

$$\text{Ker } u = \{\vec{x} \in E | u(\vec{x}) = \vec{0}_F\},$$

– *on appelle* **image** *de u, et on note* Im u*, le sous-ensemble de F défini par*

$$\text{Im } u = \{\vec{y} \in F | \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = u(\vec{x})\}.$$

Par exemple, si u est définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $u(\vec{x}) = u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 + 5x_3$, alors Ker u est le plan d'équation $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ et Im $u = \mathbb{R}$.

Proposition 2.1.1.

– Ker u *est un sous-espace vectoriel de E.*

– Im u *est un sous-espace vectoriel de F.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Pour Ker u, faire la démonstration en exercice.
On démontre maintenant que Im u est un sous-espace vectoriel de F.
Tout d'abord, $\vec{0}_F = u(\vec{0}_E)$ donc $\vec{0}_F$ appartient à Im u, donc Im u est non vide.
D'autre part, si $\vec{y}$ et $\vec{y'}$ appartiennent à Im u alors, par définition, il existe $\vec{x}$ et $\vec{x'}$ dans E tels que

$$\vec{y} = u(\vec{x}), \ \ \vec{y'} = u(\vec{x'}).$$

Donc, en utilisant la linéarité de u, on a

$$\vec{y} + \vec{y'} = u(\vec{x}) + u(\vec{x'}) = u(\vec{x} + \vec{x'}) \text{ donc } \quad \vec{y} + \vec{y'} \in \mathrm{Im}\, u.$$

De plus quel que soit λ appartenant à K,

$$\lambda \vec{y} = \lambda u(\vec{x}) = u(\lambda \vec{x}) \text{ donc } \quad \lambda \vec{y} \in \mathrm{Im}\, u.$$

Ce qui termine la démonstration.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.4 Image d'une famille liée, image d'une famille génératrice de E

Exercices :
Exercice A.1.4

Théorème 2.1.1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors on a les propriétés suivantes :*
- *l'image par u d'une famille liée quelconque de E est une famille liée de F,*
- *l'image par u d'une famille génératrice quelconque de E est une famille génératrice de* $\operatorname{Im} u$.

La démonstration de ce théorème est à faire en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.5 Projection

Exercices :
Exercice A.1.5
Exercice A.1.6

Soit E un espace vectoriel. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = F_1 \oplus F_2.$$

On a montré au chapitre 1 (paragraphe : "sous espaces supplémentaires") que pour tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à E, il existe $\vec{x}_1 \in F_1$, $\vec{x}_2 \in F_2$ uniques tels que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

Définition 2.1.3. *Soit un espace vectoriel E, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, tout vecteur $\vec{x} \in E$ peut donc s'écrire $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, où $\vec{x}_1 \in F_1$ et $\vec{x}_2 \in F_2$.*

On appelle **projection***, ou encore* **projecteur***, sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par :*

$$u(\vec{x}) = \vec{x}_1$$

Bien sûr, la projection sur un plan π parallèlement à une droite D telle que vous la connaissez déjà est une projection au sens de la définition précédente.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 2.1.2. *La projection sur F_1 parallèlement à F_2 est une application linéaire dont le noyau est F_2 et l'image est F_1.*

Démontrer cette proposition en exercice.

2.1.6 Composition de deux applications linéaires

Exercices : Exercice A.1.7

Documents : Document C.1.1

Soient $v \in \mathcal{L}(E;F)$ et $u \in \mathcal{L}(F;G)$ deux applications linéaires, on rappelle la définition de la composée de u et v, notée $u \circ v$:

$$u \circ v : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ \vec{x} & \longmapsto & u(v(\vec{x})) \end{array} \right.$$

et on a le diagramme suivant (bien noter l'ordre dans lequel sont écrits u et v) :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{v} F \xrightarrow{u} & G \\ & & \\ E & \xrightarrow{w = u \circ v} & G \end{array} \right.$$

Proposition 2.1.3. *Si $v \in \mathcal{L}(E;F)$ et $u \in \mathcal{L}(F;G)$, alors $u \circ v \in \mathcal{L}(E;G)$*

Démontrer cette proposition en exercice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.7 Application linéaire entre espaces de dimension finie

Exercices :
Exercice A.1.8

A partir de maintenant, les espaces vectoriels utilisés seront de dimension finie.

Vous pouvez traiter l'exercice avant de lire la proposition générale :

Proposition 2.1.4. *Soient $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $u \in \mathscr{L}(E;F)$, alors quel que soit $\vec{x}$ appartenant à E, le vecteur $u(\vec{x})$ est combinaison linéaire des vecteurs $\{u(\vec{e}_j)\}_{j=1,\ldots,n}$.*

Démonstration – Soit $\vec{x} \in E$, alors il se décompose de manière unique sur $\mathscr{E}$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j. \tag{2.1.1}$$

u est linéaire, donc on a

$$u(\vec{x}) = u\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u(x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(\vec{e}_j), \tag{2.1.2}$$

ce qui termine la démonstration.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On retrouve un résultat démontré dans le théorème 2.1.1. $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E donc une famille génératrice de E alors $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \ldots, u(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$.

Proposition 2.1.5. *Soient E et F deux espaces vectoriels munis, respectivement, des bases $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m)$.Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, alors pour $j = 1, 2, \ldots, n$, chacun des vecteurs $u(\vec{e}_j)$ a des composantes sur la base $\mathscr{F}$. On peut noter ces composantes*

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i.$$

Quel que soit $\vec{x} \in E$, on connait ses composantes sur $\mathscr{E}$

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$$

Alors les composantes de $u(\vec{x})$ sur $\mathscr{F}$ sont données par

$$u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \vec{f}_i \quad \text{avec} \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j, i = 1, \ldots, m.$$

Démonstration – On a

$$u(\vec{x}) = u\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j\right) \vec{f}_i$$

2.1.8 Caractérisation de injective

Exercices :
Exercice A.1.9

Théorème 2.1.2. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est injective,*

(ii) $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$,

Démonstration –
(i)$\Rightarrow$(ii) Supposons que u est injective.
Soit $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$, donc $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$.
De plus u est linéaire, donc $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$
u est injective d'où $\vec{x} = \vec{0}_E$.
On vient donc de montrer que $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Soient $\vec{x}$ et $\vec{x}'$ deux vecteurs de E tels que $u(\vec{x}) = u(\vec{x}')$,
u est linéaire donc $u(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{0}_F$,
$\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$, donc $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{0}_E$, donc $\vec{x} = \vec{x}'$.
Ce qui démontre que u est injective.

Proposition 2.1.6. *Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$ une application injective, alors l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – Soit $\mathscr{L} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ une famille libre de E, pour montrer que la famille $(u(\vec{v}_1), u(\vec{v}_2), \ldots, u(\vec{v}_n))$ est libre, on doit montrer l'implication

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{v}_i) = \vec{0}_F \Longrightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \quad \alpha_i = 0.$$

u est linéaire donc

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{v}_i) = \vec{0}_F \Rightarrow u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) = \vec{0}_F.$$

u est injective donc Ker $u = \{\vec{0}_E\}$ donc

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) = \vec{0}_F \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}_E,$$

$\mathscr{L}$ est une famille libre donc

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}_E \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n, \quad \alpha_i = 0.$$

Ce qui termine la démonstration.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.9 Caractérisation de surjective, bijective

Exercices :
Exercice A.1.10

Théorème 2.1.3. *Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(j) *u est surjective de E dans F,*

(jj) $\operatorname{Im} u = F$,

Démonstration – Dire que u est surjective c'est, par *définition*, dire que $\operatorname{Im} u = F$ (la linéarité ne joue aucun rôle ici !).

Proposition 2.1.7. *Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, une application surjective, alors l'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.*

Démonstration – On a montré dans le théorème 2.1.1 que l'image par u d'une famille génératrice de E était une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.

Quand u est surjective on a $\operatorname{Im} u = F$.

Ce qui termine la démonstration.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 2.1.8. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
- *(i) u est bijective,*
- *(ii)* $\mathrm{Ker}\, u = \{\vec{0}_E\}$ *et* $\mathrm{Im}\, u = F$,
- *(iii) l'image par u d'une base de E est une base de F.*

Démonstration – $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ est une conséquence immédiate des théorèmes 2.1.2 et 2.1.3. Montrer en exercice que $(i) \Longleftrightarrow (iii)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.10 Isomorphismes

Exercices :
Exercice A.1.11

Définition 2.1.4. *Un peu de vocabulaire :*

- **Homomorphisme** : *une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un homomorphisme de E dans F.*
- **Endomorphisme** : *une application linéaire d'un espace vectoriel E dans le même espace vectoriel E est un endomorphisme de E.*
  Dans ce cas $\mathscr{L}(E,E)$ est souvent noté plus simplement $\mathscr{L}(E)$.
- **Isomorphisme** : *une application linéaire bijective d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F est un isomorphisme de E dans F.*
  On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** *s'il existe un isomorphisme u de E dans F.*
  Si E et F sont isomorphes, alors il existe au moins un isomorphisme entre E et F, mais, bien-sûr, toute application linéaire entre E et F n'est pas un isomorphisme.
- **Automorphisme** : *une application linéaire bijective d'un espace vectoriel E dans le même espace vectoriel E est un automorphisme de E.*

Proposition 2.1.9. *E et F sont isomorphes* $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$.

Démonstration – Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Si l'application u est un isomorphisme, elle est bijective. Donc, d'après la proposition 2.1.8, l'image par u d'une base de E est une base de F. Ces bases ont donc le même nombre d'éléments, d'où l'égalité des dimensions de E et F. La réciproque est proposée en exercice, voir l'énoncé.

Une application u est bijective de E dans F si et seulement si elle admet une application réciproque u^{-1} définie de F dans E. Un isomorphisme admet donc une application réciproque. On a de plus :

Proposition 2.1.10. *Si u est un isomorphisme alors u^{-1} est un isomorphisme.*

Démonstration – u^{-1} est bijective puisqu'elle est inversible, il suffit donc de montrer sa linéarité. Soient $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$ deux vecteurs de F, posons

$$\vec{x} = u^{-1}(\vec{y}_1) + u^{-1}(\vec{y}_2) \text{ et } \vec{z} = u^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2),$$

alors la linéarité de u implique que

$$u(\vec{x}) = u(u^{-1}(\vec{y}_1) + u^{-1}(\vec{y}_2)) = u(u^{-1}(\vec{y}_1)) + u(u^{-1}(\vec{y}_2)) = \vec{y}_1 + \vec{y}_2 = u(u^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2)) = u(\vec{z})$$

or u est injective donc

$$\vec{x} = \vec{z} \Leftrightarrow u^{-1}(\vec{y}_1) + u^{-1}(\vec{y}_2) = u^{-1}(\vec{y}_1 + \vec{y}_2).$$

Démontrer de manière analogue que

$$u^{-1}(\lambda\vec{y}) = \lambda u^{-1}(\vec{y})$$

ce qui termine de démontrer que u^{-1} est linéaire.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.11 Isomorphisme entre E et K^n

Exercices :
Exercice A.1.12

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, alors pour tout $\vec{x} \in E$ ses composantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sur la base $\mathcal{E}$ sont uniques, on a :

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$$

On peut alors définir l'application ϕ de E dans K^n :

$$\phi(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Attention - L'application ϕ dépend de la base $\mathcal{E}$ choisie.

Théorème 2.1.4. *L'application ϕ définie par*

$$\vec{x} \in E \mapsto \phi(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in K^n$$

est un isomorphisme de E sur K^n.

Comme tout $\vec{x} \in E$ admet une décomposition unique sur la base $\mathcal{E}$, l'application ϕ est bien définie. Démontrer en exercice qu'elle est linéaire et bijective.

Attention, $\vec{x}$ n'est pas égal à $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.1.12 Formes linéaires

Si vous découvrez ce chapitre pour la première fois, vous pouvez, dans un premier temps, ne pas étudier cette partie sur les formes linéaires.

K est un espace vectoriel sur lui-même, il est donc possible de choisir $F = K$. On a alors la définition suivante :

Définition 2.1.5. *On appelle* **forme linéaire** *sur E une application linéaire de E dans K, c'est donc un élément de $\mathscr{L}(E;K)$.*

Par exemple :
1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant fixés dans $\mathbb{R}$, on peut définir l'application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto u(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n.$$

Vérifier que u est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $\mathscr{C}(0,1)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle fermé $[0,1]$, on peut définir l'application $u : \mathscr{C}(0,1) \to \mathbb{R}$ par

$$u(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

Vérifier que u est une forme linéaire sur $\mathscr{C}(0,1)$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Théorème 2.1.5. *Soit E muni d'une base $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, et soit u une forme linéaire sur E, alors il existe n éléments de K, notés $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ tels que $\forall x \in E$ on a*

$$u(\vec{x}) = u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

Démonstration – Ici $F = K$, donc les $u(\vec{e}_k)$ sont des scalaires que l'on peut noter β_k. On a donc

$$u(\vec{x}) = u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2 Matrices

2.2.1 Matrices-définitions

Exercices :
Exercice A.1.13
Exercice A.1.14
Exercice A.1.15
Exercice A.1.16

Exemples :
Exemple B.1.1

Soient E et F deux espaces vectoriels munis, respectivement, des bases $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m)$,
soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$,
alors pour $j = 1, 2, ..., n$, chacun des vecteurs $u(\vec{e}_j)$ a des composantes sur la base $\mathscr{F}$. On peut noter ces composantes

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{f}_i.$$

On obtient donc $m \times n$ scalaires a_{ij}. On peut ranger ces scalaires dans un tableau possédant m lignes et n colonnes : dans la j^e colonne on écrit les composantes de $u(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathscr{F}$.

Définition 2.2.1. *On appelle* **matrice** *associée à u quand on munit E et F des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ le tableau A de scalaires décrit ci-dessus.*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

La matrice A ainsi définie est explicitée par la figure suivante :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) & \dots & u(\vec{e}_j) & \dots & u(\vec{e}_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \dots \\ \vec{f}_i \\ \dots \\ \vec{f}_m \end{array}$$

On appelle $\mathcal{M}_{mn}(K)$ l'ensemble des matrices à coefficients dans K possédant m lignes et n colonnes. Plus simplement, lorsque aucune ambigüité n'est possible, on note cet ensemble $\mathcal{M}_{mn}$.

Définition 2.2.2.

- *Si $m = n$, la matrice A est dite* **carrée**.
- *Si $m = 1$,on dit que A est une* **matrice ligne** *ou encore un* **vecteur ligne**.
- *Si $n = 1$, on dit que A est une* **matrice colonne** *ou encore un* **vecteur colonne**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, on dit que A est* **diagonale**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $a_{ii} = 1$, A s'appelle la* **matrice identité**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$, on dit que A est* **triangulaire inférieure**.
- *Si $m = n$ et si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, on dit que A est* **triangulaire supérieure**.

Définition 2.2.3. *Si A est carrée, $A \in \mathcal{M}_{nn}$, on définit la* trace *de A par :*

$$\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Si E est le plan muni d'une base orthonormée $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, si u est la rotation d'un angle θ, on a alors $E = F$ et on peut choisir $\mathscr{F} = \mathscr{E}$.
On a alors

$$u(\vec{e}_1) = cos\theta\vec{e}_1 + sin\theta\vec{e}_2,\ \ u(\vec{e}_2) = -sin\theta\vec{e}_1 + cos\theta\vec{e}_2,$$

ce qui donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

On vient de voir que, des bases étant choisies sur E et F, à toute application linéaire u, on associe une matrice A.

Réciproquement, étant donné une matrice quelconque A, est-il possible de trouver des espaces vectoriels E et F, des bases $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et une application linéaire u tels que A soit la matrice associée à u quand on munit E et F des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$? La réponse est oui, on va le montrer.

Soit A une matrice possédant m lignes et n colonnes.
On peut choisir $E = K^n, F = K^m$,
On peut choisir les bases canoniques $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$:
- Pour $j = 1,\ldots,n$, $\vec{e}_j = (0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)$ avec l'élément 1 de K en j^e position.
- Pour $i = 1,\ldots,m$, $\vec{f}_i = (0,0,\ldots,0,1,\ldots,0)$ avec l'élément 1 de K en i^e position.

On définit u l'application linéaire de E dans F par

$$u(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{f}_i,\ \ j = 1,\ldots,n.$$

En effet, d'après la proposition 2.1.4, $u(\vec{x})$ est alors défini pour tout $\vec{x}$ appartenant à E.

On construit la matrice associée à u quand on munit E et F des bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ et on obtient la matrice A.

2.2.2 Notations

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K.

   On fixe une base de E : $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

   Quel que soit $\vec{x} \in E$, ce vecteur se décompose sur la base $\mathscr{E}$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les composantes de $\vec{x}$ sur la base $\mathscr{E}$, on a $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

   On définit l'application ϕ qui à $\vec{x} \in E$ associe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$. On a vu que ϕ est une application bijective de E sur K^n.

   On peut aussi définir l'application ψ de E sur $\mathscr{M}_{n1}(K)$ qui à $\vec{x} \in E$ associe la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(K)$. on peut montrer que l'application ψ est bijective de E sur $\mathscr{M}_{n1}(K)$.

   Dans la suite de ce cours on notera $X = \psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Cette matrice colonne X dépend de la base $\mathscr{E}$ choisie.

2. Soit A une matrice appartenant à $\mathscr{M}_{nm}(K)$. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{23}(\mathbb{R}).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Notations

On note

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{M}_{21},$$

A_j est la j^e colonne de A, j varie de 1 à m.
On note

$$\underline{A}_1 = (3,2,4), \underline{A}_2 = (5,6,7), \underline{A}_1, \underline{A}_2 \in \mathcal{M}_{13},$$

$\underline{A}_i$ est la i^e ligne de A, i varie de 1 à n.

3. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K.
   $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E.
   $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$ sont p vecteurs appartenant à E.
   On note x_{ij} la i^e composante du vecteur $\vec{x}_j$: $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\vec{e}_i$.
   On peut donc associer à la famille $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$, une matrice $X \in \mathcal{M}_{np}$.
   Par exemple : $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique.
   On définit les vecteurs $\vec{x}_1 = (1,5)$, $\vec{x}_2 = (2,6)$, $\vec{x}_3 = (4,7)$, alors $x_{11} = 1$, $x_{21} = 5$, $x_{12} = 2$, $x_{22} = 6$, etc.
   On a $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
   Dans le cas où $p = 1$, on a un seul vecteur $\vec{x}$. L'indice j est alors inutile et on note x_i la i^e composante de $\vec{x}$ sur la base $\mathcal{E}$.

4. Les notations précédentes sont cohérentes. Dans l'exemple du paragraphe 3, on a 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On choisit la base canonique de $\mathbb{R}^2$. L'application ψ définie dans le paragraphe 1 permet d'associer à chacun des 3 vecteurs une matrice colonne appartenant à $\mathcal{M}_{21}$:

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

- à $\vec{x}_1$ on associe la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$,
- à $\vec{x}_2$ on associe $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et
- à $\vec{x}_3$ on associe $X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

En utilisant le paragraphe 2,on peut définir la matrice

$$X = (X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

et on retrouve la matrice du paragraphe 3.

2.2.3 Espace vectoriel des matrices

Exercices :
Exercice A.1.17

L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{mn}(K)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur K. Pour cela, on définit sur $\mathcal{M}_{mn}$ deux lois appelées somme de deux matrices et produit d'une matrice par un scalaire.

Définition 2.2.4. Somme de deux matrices

Si A et B sont 2 matrices appartenant à $\mathcal{M}_{mn}(K)$, on appelle **somme** *de A et B, et on note $A+B$, la matrice $C \in \mathcal{M}_{mn}$ dont les coefficients sont*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n. \tag{2.2.1}$$

La somme est une loi interne sur $\mathcal{M}_{mn}(K)$.

Si A (resp. B) est la matrice associée à une application linéaire u (resp. v) de E dans F alors la matrice $A+B$ est la matrice associée à l'application linéaire $u+v$.

Définition 2.2.5. Produit d'une matrice par un scalaire

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ et $\lambda \in K$, on appelle **produit** *de A par λ, et on note λA, la matrice $C \in \mathcal{M}_{mn}(K)$ dont les coefficients sont*

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n. \tag{2.2.2}$$

Le produit par un scalaire est une loi externe sur $\mathcal{M}_{mn}(K)$.

Si A est la matrice associée à une application linéaire u de E dans F, alors la matrice λA est la matrice associée à l'application linéaire λu.

On vérifie que $\mathcal{M}_{mn}(K)$, muni des 2 lois précédentes, a une structure d'espace vectoriel sur K.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{mn}$ a pour dimension $m \times n$. Démontrer ce résultat en exercice.

2.2.4 Produit de deux matrices

Exercices :
Exercice A.1.18
Exercice A.1.19

Définition 2.2.6. Produit de deux matrices -
Soit E un espace vectoriel sur K de dimension p et $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de E.
Soit F un espace vectoriel sur K de dimension n et $\mathscr{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ une base de F.
Soit G un espace vectoriel sur K de dimension q et $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q)$ une base de G.
Soit $v \in \mathscr{L}(E;F)$ et $u \in \mathscr{L}(F;G)$. On pose $w = u \circ v$ et on a donc $w \in \mathscr{L}(E;G)$.
Soit A la matrice associée à u quand on choisit les bases $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$. On a $A \in \mathscr{M}_{qn}(K)$.
Soit B la matrice associée à v quand on choisit les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. On a $B \in \mathscr{M}_{np}(K)$.
Soit C la matrice associée à $w = u \circ v$ quand on choisit les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{G}$.
On a $C \in \mathscr{M}_{qp}(K)$.
On définit le **produit** *des matrices A et B par $AB = C$*

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{v} & F & \xrightarrow{u} & G \\ \mathscr{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p) & B & \mathscr{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n) & A & \mathscr{G} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad\quad w=u\circ v \quad\quad} & G \\ \mathscr{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p) & C = AB & \mathscr{G} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_q) \end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Produit de deux matrices

Proposition 2.2.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{qn}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(K)$, le produit de deux matrices A et B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{qp}(K)$ dont les éléments sont définis par*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\mathbf{n}} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} +, \qquad i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, p. \tag{2.2.3}$$

Démonstration – D'après la définition de C on a :

$$w(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{q} c_{ij} \vec{g}_i. \tag{2.2.4}$$

D'autre part, on a $w(\vec{e}_j) = u(v(\vec{e}_j))$.

D'après la définition de B, on a

$$v(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \vec{f}_k.$$

On utilise la linéarité de u :

$$w(\vec{e}_j) = u(v(\vec{e}_j)) = u\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \vec{f}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u(\vec{f}_k). \tag{2.2.5}$$

D'après la définition de A, on a

$$u(\vec{f}_k) = \sum_{i=1}^{q} a_{ik} \vec{g}_i. \tag{2.2.6}$$

En utilisant (2.2.6) et (2.2.5), on obtient

$$w(\vec{e}_j) = u(v(\vec{e}_j)) = \sum_{k=1}^{n} \left(b_{kj} \sum_{i=1}^{q} a_{ik} \vec{g}_i \right) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \vec{g}_i. \tag{2.2.7}$$

La décomposition du vecteur $w(\vec{e}_j)$ sur la base $\mathscr{G}$ est unique. En comparant les expressions (2.2.4) et (2.2.7), on obtient la formule (2.2.3) de la définition.

L'élément c_{ij} de la matrice $C = AB$ est égal au produit terme par terme de la i^e ligne de A par la j^e colonne de B. En effet, on a :

$$\underline{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}), \quad B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$c_{ij} = \underline{A}_i B_j.$$

Le produit de 2 matrices est dit ligne par colonne

Attention ! Le produit de A par B est possible si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B !
Par exemple, si $A \in \mathscr{M}_{23}(K), B \in \mathscr{M}_{34}(K)$, le produit AB existe et $AB \in \mathscr{M}_{24}(K)$. Par contre le produit BA n'est pas possible.
Même si AB et BA existent (par exemple $A \in \mathscr{M}_{23}(K), B \in \mathscr{M}_{32}(K)$), en général on a $AB \neq BA$.Cette non-commutativité du produit de matrices provient de la non-commutativité de la composition des applications (même si elles sont linéaires).

Si $A \in \mathscr{M}_{mn}$, $B \in \mathscr{M}_{np}$, $C \in \mathscr{M}_{pq}$,alors les produits BC, $A(BC)$, AB, $(AB)C$ existent. Il suffit de vérifier, par exemple, que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de BC. On peut citer la proposition suivante :

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Proposition 2.2.2.

– *Soit* $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $B \in \mathcal{M}_{np}$, $C \in \mathcal{M}_{pq}$, *alors le produit est* **associatif**, *c'est-à-dire*

$$A(BC) = (AB)C.$$

– *Soit* $A \in \mathcal{M}_{qn}$,$D \in \mathcal{M}_{qn}$, $B \in \mathcal{M}_{np}$, $C \in \mathcal{M}_{np}$, *alors le produit est* **distributif par rapport à la somme**, *c'est-à-dire* $A(B+C) = AB + AC$ *et*

$$(A+D)B = AB + DB.$$

Démonstration – On déduit facilement ces propriétés des propriétés similaires sur la composition et la somme des applications.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.5 Calcul explicite de l'image d'un vecteur

Exercices :
Exercice A.1.20

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n et $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Soit F un espace vectoriel sur K de dimension m et $\mathscr{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ une base de F.
Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$ et A la matrice associée à u quand on choisit les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.
On a $A \in \mathscr{M}_{mn}(K)$.

Soit $\vec{x} \in E$, on note $\vec{y} = u(\vec{x})$.
Si on connait les composantes $x_1, ..., x_n$ de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{E}$, alors la matrice A permet d'obtenir les composantes $y_1, ..., y_m$ de $\vec{y}$ dans la base $\mathscr{F}$.

On a vu dans la proposition 2.1.5 que

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, i = 1, \ldots, m.$$

Si on range les composantes des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans les matrices colonnes X et Y, cette relation s'écrit sous la forme d'un produit matriciel :

$$Y = AX, \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Le $i^{\text{ème}}$ terme de ce produit AX est égal au produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la matrice colonne X. La matrice colonne AX contient les composantes de $u(\vec{x})$ dans la base $\mathscr{F}$.

2.2.6 Inverse d'une matrice carrée

Exercices :
Exercice A.1.21

Définition 2.2.7. *Soit A une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_{nn}$.*
On dit que A est **inversible**, *ou* **régulière**, *s'il existe une matrice carrée C appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$ telle que $AC = CA = I$ où I est la matrice identité appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$.*
Quand elle existe, la matrice C est unique. Elle s'appelle l'inverse de A et on la note $C = A^{-1}$

Proposition 2.2.3.

1. *Soit A une matrice carrée, s'il existe une matrice C telle que $AC = I$ alors la matrice A est inversible et $C = A^{-1}$.*
2. *Soit A une matrice carrée, s'il existe une matrice C telle que $CA = I$ alors la matrice A est inversible et $C = A^{-1}$.*

Démonstration – On montrera dans le chapitre sur les déterminants que s'il existe C telle que $AC = I$, alors A est inversible. On admet que A est inversible et on montre que, alors $C = A^{-1}$:

$$AC = I \Rightarrow A^{-1}(AC) = A^{-1}I \Rightarrow (A^{-1}A)C = A^{-1} \Rightarrow C = A^{-1}.$$

Le deuxième point se démontre de façon similaire, mais, attention, le produit n'est pas commutatif.

Proposition 2.2.4. *Si A et B sont deux matrices carrées inversibles appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$, alors la matrice carrée AB est inversible et on a :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Faire la démonstration en exercice.

Proposition 2.2.5. *Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension et soient $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F.*
Si $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est une application bijective,
si A est la matrice associée à u quand on choisit les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$,
alors A est inversible et A^{-1} est la matrice associée à u^{-1} quand on choisit les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$.

Démonstration – u est bijective, donc u^{-1} l'application linéaire réciproque existe et on a $u \circ u^{-1} = id_F$. Si on note C la matrice associée à u^{-1} quand on choisit les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$, on a donc $AC = I$, donc A est inversible et $C = A^{-1}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.7 Transposée d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.22

Définition 2.2.8. *Si $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle* **transposée** *de A la matrice notée A^T appartenant à $\mathcal{M}_{nm}$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes, on a donc*

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

En utilisant les notations habituelles pour les lignes et les colonnes de A, on a les égalités suivantes :

$$(A_i)^T = \underline{A^T}_i.$$

Si X et Y appartiennent à $\mathcal{M}_{m1}(K)$ alors $X^T Y = Y^T X$ est un scalaire de K et plus précisément on a :

$$X^T Y = Y^T X = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

Proposition 2.2.6. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $C \in \mathcal{M}_{mn}$ et $B \in \mathcal{M}_{np}$ alors*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + C)^T = A^T + C^T$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Démonstration – On peut démontrer très facilement les propriétés 1, 2 et 3.

4. $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$.

   $(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}$.

   Ce qui termine la démonstration.

Définition 2.2.9. *Soit A appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$.*

On dit que A est symétrique si $A^T = A$.

On dit que A est antisymétrique si $A^T = -A$.

A est symétrique si et seulement si $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n,\ a_{ij} = a_{ji}$.

A est antisymétrique si et seulement si $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n,\ a_{ij} = -a_{ji}$.On a donc en particulier $\forall i = 1, \dots, n,\ a_{ii} = 0$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.8 Changement de base-matrice de passage

Exercices :
Exercice A.1.23

Soit E un espace vectoriel sur K de dimension n.
Soient $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{E}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n)$ deux bases de E. Les n vecteurs de $\mathscr{E}'$ ont donc des composantes sur la base $\mathscr{E}$. On peut ranger ces n^2 scalaires dans une matrice appartenant à $\mathscr{M}_{nn}(K)$. Cette matrice, appelée matrice de passage, est définie de la façon suivante :

Définition 2.2.10. *Soit $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathscr{E}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n)$ deux bases de E.*
Si, pour $1 \leq i \leq n$, on note $p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni}$ les composantes du vecteur $\vec{e'}_i$ sur la base $\mathscr{E}$, on définit ainsi une matrice P appelée **matrice de passage** *de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{E}'$. La matrice P est donc obtenue en mettant en colonnes les composantes des vecteurs de la "nouvelle base" $\mathscr{E}'$ dans "l'ancienne base" $\mathscr{E}$:*

$$P = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} \vec{e'}_1 & \ldots & \vec{e'}_j & \ldots & \vec{e'}_n \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
p_{11} & \ldots & p_{1j} & \ldots & p_{1n} \\
\vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\
p_{i1} & \ldots & p_{ij} & \ldots & p_{in} \\
\vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\
p_{n1} & \ldots & p_{nj} & \ldots & p_{nn}
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_i \\ \ldots \\ \vec{e}_n \end{array}
\end{array}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Changement de base-matrice de passage

Si u est un endomorphisme de E, pour associer une matrice A à u, il faut choisir une base sur E ensemble de départ, et une base sur E ensemble d'arrivée. Très souvent on choisit la même base, mais ce n'est pas obligatoire.

Proposition 2.2.7. *Soit E un espace vectoriel.*
Soient $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{E}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n)$ deux bases de E.
L'application identité de E dans E est un endomorphisme de E, noté i_E.
On munit E, espace vectoriel de départ, de la base $\mathcal{E}'$ et on munit E, espace vectoriel d'arrivée, de la base $\mathcal{E}$. La matrice associée à l'endomorphisme i_E quand on choisit ces bases est P, la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i_E} & E \\ \mathcal{E}' & P & \mathcal{E} \end{array}.$$

Démonstration – On utilise la définition de la matrice associée à l'application linéaire i_E, les colonnes de cette matrice contiennent les composantes des images des vecteurs de $\mathcal{E}'$ (base de l'espace vectoriel de départ) dans $\mathcal{E}$ (base de l'espace vectoriel d'arrivée) :

$$\vec{e'}_j = i_E(\vec{e'}_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e}_i. \tag{2.2.8}$$

Proposition 2.2.8. *La matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$.*

Démonstration – La matrice P est associée à l'application i_E lorsque l'on munit E de la base $\mathcal{E}'$ au départ et de la base $\mathcal{E}$ à l'arrivée. Or l'application i_E est bijective, donc P est inversible.
P^{-1} est alors associée à l'application réciproque. Cette application réciproque est i_E lorsque l'on

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

munit E de la base $\mathscr{E}$ au départ et de la base $\mathscr{E}'$ à l'arrivée. P^{-1} est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{E}'$ à la base $\mathscr{E}$.

Proposition 2.2.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension n.*
Soit $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.
Soit $Q \in \mathscr{M}_{nn}$ une matrice dont les termes sont notés q_{ij}.
On définit les vecteurs

$$\vec{e'}_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \vec{e}_i,$$

alors, on a l'équivalence suivante :

$$(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n) \text{ est une base de } E \Longleftrightarrow Q \text{ est inversible.}$$

Démonstration –
Si $\mathscr{E}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n)$ est une base de E, alors Q est la matrice de passage de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$, donc Q est inversible.
Montrons la réciproque : On suppose Q inversible, on veut montrer que $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n)$ est une base de E. $\dim E = n$, la famille contient n vecteurs, il suffit donc de montrer que la famille est

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

libre.

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}'_j = \vec{0} &\iff \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i = \vec{0} \\
&\iff \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j\right)\vec{e}_i = \vec{0} \text{ (on change l'ordre des sommes)} \\
&\iff \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_j = 0, \forall i = 1,2,\ldots,n \text{ (car } (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n) \text{ est une base de} E) \\
&\iff QX = 0 \ \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&\iff X = 0 \text{ (car } Q \text{ est inversible)} \\
&\iff x_j = 0 \ \forall j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

Changement de base-matrice de passage

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.9 Changement de base et composantes d'un vecteur

Exercices :
Exercice A.1.24

Soit E un espace vectoriel et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E. Un même vecteur $\vec{x}$ a des composantes sur $\mathscr{E}$ et sur $\mathscr{E}'$. Quelle relation lie ces composantes ?

Proposition 2.2.10. *Soit E un espace vectoriel et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E.*
Soit $\vec{x} \in E$, si P est la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{E}$, si $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ sont les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{E}'$, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, alors on a

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X.$$

Démonstration – On décompose le vecteur $\vec{x}$ sur la base $\mathscr{E}'$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \vec{e'}_j$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

On utilise la définition de la matrice P donnée par (2.2.8)

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) \vec{e}_i .$$

Or $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{E}$ on a donc

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \Longleftrightarrow X = PX'.$$

2.2.10 Changement de bases et matrice associée à une application linéaire

Exercices :
Exercice A.1.25

Soit E un espace vectoriel et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E.
Soit u un endomorphisme de E.
Soit A la matrice associée à u quand on choisit la base $\mathscr{E}$ (au départ et à l'arrivée).
Soit A' la matrice associée à u quand on choisit la base $\mathscr{E}'$ (au départ et à l'arrivée).
Quelle relation lie les matrices A et A' ?

Théorème 2.2.1. *Soit E un espace vectoriel et soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E;E)$. Si A est la matrice associée à u quand on choisit la base $\mathscr{E}$, si A' est la matrice associée à u quand on choisit la base $\mathscr{E}'$ et si P est la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, alors on a la relation*

$$A' = P^{-1}AP.$$

Démonstration – Dans le diagramme suivant, pour chacune des applications linéaires, on a noté la base choisie sur l'ensemble de départ, la base choisie sur l'ensemble d'arrivée et la matrice associée avec ce choix des bases :

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{i_E} & E & \xrightarrow{u} & E & \xrightarrow{i_E} & E \\ \mathcal{E}' & P & \mathcal{E} & A & \mathcal{E} & P^{-1} & \mathcal{E}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\hspace{6em}u\hspace{6em}} & E \\ \mathcal{E}' & A' & \mathcal{E}' \end{array}$$

On utilise le résultat qui lie composition d'applications linéaires et produit des matrices associées :

$$u = i_E \circ u \circ i_E, \text{ donc } A' = P^{-1}AP.$$

Une autre démonstration possible : si l'on note $\vec{y} = u(\vec{x})$,si X, Y, X', Y' sont les vecteurs colonnes habituels, on a

$$\left\{\begin{array}{c} Y = AX \\ Y = PY' \\ X = PX' \\ Y' = A'X' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} PY' = APX' \\ Y' = A'X' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} Y' = P^{-1}APX' \\ Y' = A'X' \end{array}\right. \Rightarrow A'X' = (P^{-1}AP)X'.$$

La relation précédente est vraie quel que soit le vecteur colonne X' donc $A' = P^{-1}AP$.

Plus généralement, on a le théorème suivant

Théorème 2.2.2. *Si $u \in \mathcal{L}(E;F)$, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux bases de E, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux bases de F, si on note P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, si on note Q la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$, si A est*

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

la matrice associée à u quand on choisit les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, si A' est la matrice associée à u quand on choisit les bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ alors on a

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Démonstration – Le diagramme correspondant s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc}
E & \xrightarrow{i_E} & E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{i_F} & F \\
\mathcal{E}' & P & \mathcal{E} & A & \mathcal{F} & Q^{-1} & \mathcal{F}'
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\qquad\qquad u \qquad\qquad} & F \\
\mathcal{E}' & A' & \mathcal{F}'
\end{array}$$

On peut terminer le raisonnement comme dans le théorème précédent.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.11 Matrices semblables

Définition 2.2.11. *S'il existe P inversible telle que $A' = P^{-1}AP$, A et A' sont dites* **semblables**.

Bien sûr les matrices associées au même endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E;E)$, sont semblables.

Proposition 2.2.11.
- *Si A et B sont semblables, alors A^T et B^T sont semblables.*
- *Si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.*
- *Si A et B sont semblables, leurs traces sont égales.*

Démontrer cette proposition.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.12 Rang

Exercices :
Exercice A.1.26
Exercice A.1.27

Définition 2.2.12. *Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, on appelle* **rang** *de u et on note* $\operatorname{rang}(u)$ *la dimension de* $\operatorname{Im} u$.

$\operatorname{Im} u$ est inclus dans F, donc $\operatorname{rang}(u) \leq \dim F$. De plus $\operatorname{rang}(u) = \dim F$ si et seulement si u est surjective.

D'autre part, l'image d'une base de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$ donc on a $\operatorname{rang}(u) \leq \dim E$.

Définition 2.2.13. *Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}$, on appelle* $\operatorname{Im} A$ *le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{m1}$ défini par :*

$$Y \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow \exists X \in \mathscr{M}_{n1}, Y = AX.$$

On vérifie facilement que $\operatorname{Im} A$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{m1}$.

Proposition 2.2.12. *Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}$,* $\operatorname{Im} A$ *est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A, c'est-à-dire :*

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{vect}\langle A_1, \ldots, A_n \rangle.$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démontrer cette proposition en exercice.

Définition 2.2.14. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{mn}$*, on appelle rang de* A *et on note* $\mathrm{rang}\,(A)$*, la dimension du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Im}\ A$.

Proposition 2.2.13. *Si* $u \in \mathcal{L}(E;F)$*, si on choisit une base* $\mathcal{E}$ *sur* E *et une base* $\mathcal{F}$ *sur* F*, si on définit* A *la matrice associée à* u*, alors* $\mathrm{rang}\,(u) = \mathrm{rang}\,(A)$.

Démonstration – On définit l'application ϕ de F sur $\mathcal{M}_{m1}$ qui à tout vecteur $\vec{y}$ de F associe le vecteur colonne Y de $\mathcal{M}_{m1}$ contenant les composantes de $\vec{y}$ dans la base $\mathcal{F}$.
Comme dans le théorème 2.1.4, on peut démontrer que ϕ est un isomorphisme de F dans $\mathcal{M}_{m1}$.
On note $\mathcal{E} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$.
D'après la définition de A, on a $\phi(u(\vec{e}_i)) = A_i$.
Or $\mathrm{Im}\ u =$ vect $< u(\vec{e}_1),\ldots,u(\vec{e}_n) >$. Donc $\phi(\mathrm{Im}\ u) =$ vect $< A_1,...,A_n >= \mathrm{Im}\ A$. Donc $\mathrm{Im}\ u$ et $\mathrm{Im}\ A$ sont isomorphes. Donc $\dim \mathrm{Im}\ u = \dim \mathrm{Im}\ A$, donc $\mathrm{rang}\ u = \mathrm{rang}\ A$.

Proposition 2.2.14.

1. *Si* A *et* A' *sont semblables, alors elles ont le même rang.*
2. A *et* A^T *ont le même rang.*

Démonstration – A et A' sont associées à la même application linéaire, donc elles ont le même rang.
La deuxième partie sera démontrée dans un chapitre suivant.

Calcul pratique
Il résulte de la définition 2.2.14 et de la proposition précédente que le calcul pratique du rang

d'une matrice se ramène au calcul du nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes ou du nombre maximal de lignes linéairement indépendantes. On choisit l'un ou l'autre suivant que l'un se calcule plus facilement que l'autre.
On peut aussi déduire le rang d'une matrice à partir du rang de l'application linéaire u associée, si celui-ci est connu.
On verra dans le chapitre sur les déterminants une autre façon de calculer le rang d'une matrice.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.13 Rang et dimension du noyau d'une application linéaire

Exercices :
Exercice A.1.28

Théorème 2.2.3. *Soit* $u \in \mathscr{L}(E;F)$, *alors* $\dim(\text{Ker } u) + \text{rang } u = \dim E$.

Démonstration – Si Ker $u = E$, alors u est l'application nulle, donc Im $u = \{\vec{0}\}$, donc rang $u = 0$. Le théorème est alors vérifié.

Si Ker u est strictement inclus dans E, alors $\dim(ker\, u) < \dim E$.
On note $q = \dim(\text{Ker } u)$, $\quad n = \dim E$. Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_q)$ une base de Ker u. On complète cette famille libre de E pour obtenir une base $\mathscr{B}'$ de E

$$\mathscr{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_q, \vec{e}_{q+1}, \ldots, \vec{e}_n).$$

On va montrer que $\mathscr{C} = (u(\vec{e}_{q+1}), \ldots, u(\vec{e}_n))$ est une base de Im u.
$\mathscr{C}$ est une famille génératrice de Im u, en effet $u(\vec{e}_{q+1}), \ldots, u(\vec{e}_n)$ appartiennent à Im u et de plus quel que soit $\vec{y} \in$ Im u, il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$.
Le vecteur $\vec{x}$ se décompose sur la base $\mathscr{B}'$: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.
On utilise la linéarité de u, on a donc

$$\vec{y} = u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(\vec{e}_i) = \sum_{i=q+1}^{n} x_i u(\vec{e}_i).$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Ceci termine de démontrer que la famille $\mathscr{C}$ est une famille génératrice de Im u.

$\mathscr{C}$ est une famille libre, en effet

$$\sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i u(\vec{e}_i) = \vec{0}_F \Longrightarrow u\left(\sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i\right) = \vec{0}_F \Longrightarrow \sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \in \operatorname{Ker} u.$$

Or $\mathscr{B}$ est une base de Ker u, donc il existe des scalaires $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_q$ tels que

$$\sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{q} \beta_i \vec{e}_i \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{q} \beta_i \vec{e}_i + \sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i = \vec{0}.$$

Or la famille $\mathscr{B}'$ est libre donc $\alpha_i = 0$ pour $i = q+1, \ldots, n$ (et $\beta_j = 0$ pour $j = 1, \ldots, q$). Ceci termine de démontrer que la famille $\mathscr{C}$ est libre.
Donc $\mathscr{C}$ est une base de Im u. Cette famille contient $n - q$ vecteurs donc

$$\text{rang } (u) = \dim (\operatorname{Im} u) = n - q = \dim E - \dim (\operatorname{Ker} u).$$

Du théorème précédent découle le résultat très important suivant :

Proposition 2.2.15. *Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$.*
Si E et F sont deux espaces vectoriels de même dimension, alors les propositions suivantes sont équivalentes
– *(i) u injective,*
– *(ii) u surjective,*
– *(iii) u bijective.*

Démonstration – Il suffit de montrer que (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

$$\begin{aligned} u \text{ injective} \quad & \Leftrightarrow \quad \text{Ker } u = \{\vec{0}_E\} \Leftrightarrow \dim(\text{Im } u) = \dim E (\text{ théorème } 2.2.3) \\ & \Leftrightarrow \quad \dim F = \dim(\text{Im } u) \text{ car } \dim E = \dim F \text{ par hypothèse} \\ & \Leftrightarrow \quad F = \text{Im } u \text{ car Im } u \text{ est un sous-espace vectoriel de } F \\ & \Leftrightarrow \quad u \text{ surjective.} \end{aligned}$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

2.2.14 Noyau d'une matrice

Exercices :
Exercice A.1.29
Exercice A.1.30

Définition 2.2.15. *Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, on appelle noyau de A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$ noté* $\mathrm{Ker}\, A$, *défini par :*

$$\mathrm{Ker}\, A = \{X \in \mathcal{M}_{n1}, AX = 0\}.$$

On montre facilement que $\mathrm{Ker}\, A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$.

Théorème 2.2.4. *Si $A \in \mathcal{M}_{mn}$, alors*

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\, A) + \dim\,(\mathrm{Im}\, A) = n = \textit{ nombre de colonnes de } A.$$

Démonstration – On définit l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{n1}$ dans $\mathcal{M}_{m1}$ par $u(X) = AX$ on a alors $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, A$, de plus $\dim \mathcal{M}_{n1} = n$ et le théorème 2.2.3 permet donc de déduire le résultat.

On peut énoncer un autre résultat important :

Proposition 2.2.16. *Si A est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{nn}$, on a les équivalences suivantes :*

$$A \textit{ inversible} \iff \mathrm{Ker}\, A = \{0\} \iff \mathrm{rang}\, A = n$$

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Démonstration – L'application linéaire u définie par $u(X) = AX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}$ (ici $m = n$). On utilise la proposition 2.2.15 et on a :

$$u \text{ inversible } \Leftrightarrow u \text{ bijective } \Leftrightarrow u \text{ bijective } \Leftrightarrow u \text{ injective } \Leftrightarrow \text{Ker } u = \{\vec{0}\}$$

La matrice associée à u quand on choisit la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}$ est A.

On a donc :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow u \text{ inversible}$$

On utilise le thérorème 2.2.4 :

$$\text{Ker } u = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{Ker } A) = 0 \Leftrightarrow \dim(\text{Im } A) = n \Leftrightarrow \text{rang } A = n$$

Ce qui termine de démontrer les équivalences :

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow u \text{ inversible } \Leftrightarrow \text{Ker } u = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow \text{rang } A = n$$

On verra une autre propriété caractéristique des matrices inversibles dans le chapitre sur les déterminants.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe A
Exercices

A.1 Exercices du chapitre 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.1 Ch2-Exercice1

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? :

1. L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $u(x) = \cos x$.

2. L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $u(x) = \alpha x + \beta$, (α, β donnés dans $\mathbb{R}$) ; discuter suivant les valeurs de α et β.

3. L'application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donnée par
$$u(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,\ (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ donnés dans } \mathbb{R}).$$

4. La projection d'un vecteur de l'espace sur un plan Π parallèlement à une droite Δ donnée.

5. Soit $\mathscr{P}_k$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k, dont on note les éléments P. On définit $u : \mathscr{P}_k \to \mathscr{P}_{k-1}$ par $u(P) = P'$, (P' est la dérivée de P).

6. L'application $u : \mathscr{P}_k \to \mathscr{P}_{2k}$ définie par $u(P) = P^2$.

7. Soit $\mathscr{C}(0,1)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé $[0,1]$, dont on note ϕ les éléments. On définit alors $u : \mathscr{C}(0,1) \to \mathbb{R}$ par $u(\phi) = \int_0^1 \phi(t)\,dt$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution

Exercice A.1.2 Ch2-Exercice2

Montrer que Ker u est un sous-espace vectoriel de E

retour au cours

Exercice A.1.3 Ch2-Exercice3

On reprend les applications de l'exercice A.1.1, lorsque ces applications sont linéaires déterminer leur noyau et leur image

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.4 Ch2-Exercice4

Démontrer le théorème suivant : Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, alors on a les propriétés suivantes :

- l'image par u de toute famille liée de E est une famille liée de F,
- l'image par u de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de Im u.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.5 Ch2-Exercice5

Soit un espace vectoriel E, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, on appelle **projection** ou encore **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par :

$$u(\vec{x}) = \vec{x}_1 \text{ si } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ où } \vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2.$$

Montrer que la projection ainsi définie est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.6 Ch2-Exercice6

Montrer que si u est une projection alors $u = u \circ u$. On démontrera la réciproque de cette propriété en TD.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.7 Ch2-Exercice7

Vérifier que $w = u \circ v$ est bien un élément de $\mathscr{L}(E;G)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.8 Ch2-Exercice8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 , $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E, soit F un espace vectoriel de dimension 2 , $\mathscr{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E;F)$. On sait que
$u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2, u(\vec{e}_2) = \vec{f}_1 - \vec{f}_2, u(\vec{e}_3) = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_2$.
Calculer l'expression de $u(\vec{x})$ pour $\vec{x}$ quelconque de E

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.9 Ch2-Exercice9

1. On suppose que l'application $u \in \mathcal{L}(E;F)$ est injective.
   (a) Montrer que si la famille $(u(\vec{x}_1),\ldots,u(\vec{x}_p))$ est liée alors la famille $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p))$ est liée.
   (b) Montrer que l'image d'une base de E est une base de Im u.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E;F)$, E de type fini, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) u est injective,
   (ii) il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ de E telle que $(u(\vec{e}_1),\ldots,u(\vec{e}_n))$ soit libre.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.10 Ch2-Exercice10

Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, on définit les propositions suivantes :

- (i) u est bijective,
- (ii) l'image par u d'une base de E est une base de F.

Montrer que $(i) \iff (ii)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.11 Ch2-Exercice11

Soient E et F deux espaces de même dimension n,
soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n)$ des bases de E et F,
on définit une application linéaire u de la manière suivante $u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$.
Montrer qu'alors u est bijective de E sur F.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.12 Ch2-Exercice12

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, alors pour tout $\vec{x} \in E$ on peut écrire

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$$

et on peut associer à $\vec{x} \in E$ le vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ de K^n correspondant aux composantes de $\vec{x}$ sur $\mathcal{E}$.
Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) : E \to K^n$ ainsi définie est un isomorphisme de E sur K^n.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.13 Ch2-Exercice13

Montrer que la matrice de l'application $i_E : E \mapsto E$ est la matrice identité I lorsque l'on munit l'espace E de la base $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.14 Ch2-Exercice14

On suppose E=$F = \mathscr{P}_2$, on munit $\mathscr{P}_2$ de la base canonique (p_0, p_1, p_2), on définit u telle que $u(p) = p'$. Déterminer alors la matrice de u.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.15 Ch2-Exercice15

Soit la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est A lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques. Que vaut $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \ldots, u(\vec{e}_n)$?
En déduire $u(\vec{x})$ pour $\vec{x} = (1, -1, 2)$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.16 Ch2-Exercice16

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$u(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$,
déterminer la matrice A associée à u lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ des bases canoniques.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.17 Ch2-Exercice17

1. Démontrer que $\mathcal{M}_{mn}$ est un espace vectoriel, en particulier quel est l'élément neutre pour l'addition ? Quel est l'opposé de A ?
2. Déterminer une base de $\mathcal{M}_{mn}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.18 Ch2-Exercice18

Calculer le produit AB (et BA lorsque cela est possible) dans les cas suivants :

– $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

– $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.19 Ch2-Exercice19

On définit les matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $D' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer BD', DB . Que se passe-t-il quand on multiplie une matrice à droite par une matrice diagonale ? quand on multiplie une matrice à gauche par une matrice diagonale ? Enoncer des résultats généraux.
2. Par quelle matrice L doit-on multiplier B à gauche pour que $LB = \underline{B}_2$? Par quelle matrice C doit-on multiplier B à droite pour que $BC = B_1$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.20 Ch2-Exercice20

Reprendre l'exercice A.1.15. Que vaut X ? Calculer AX et comparer avec ce qui a été trouvé alors.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.21 Ch2-Exercice21

Démontrer que le produit de deux matrices carrées inversibles de même dimension est inversible et on a
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.22 Ch2-Exercice22

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Expliciter $\underline{B}_1$, $\underline{B}_2$, $\underline{B}_3$, B_1, B_2, $\underline{B^T}_1$, $\underline{B^T}_2$, $(B^T)_1$, $(B^T)_2$, $(B^T)_3$, $(\underline{B}_1)^T$, $(\underline{B}_2)^T$, $(\underline{B}_3)^T$,$(B_1)^T$, $(B_2)^T$. Vérifier sur cet exemple que : $(B_i)^T$=$\underline{B^T}_i$.
Bien sûr ces résultats se généralisent à une matrice B quelconque.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.23 Ch2-Exercice23

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
On définit les vecteurs $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e'}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
– Montrer que $\mathscr{E}' = (\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$ forme une base de E.
– Que vaut P matrice de passage de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$?

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.24 Ch2-Exercice24

Reprendre l'exercice A.1.23

- Exprimer $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
- Si x_1 et x_2 sont les composantes du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{E}$, en déduire x'_1 et x'_2 ses composantes dans la base $\mathscr{E}'$.
- Vérifier que $X = PX'$.
- Que vaut P^{-1} matrice de passage de $\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{E}$? Effectuer le produit PP^{-1}.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.25 Ch2-Exercice25

On reprend les données de l'exercice A.1.23. On définit $u \in \mathscr{L}(E;E)$ par
$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, u(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

- Quelle est la matrice A de u dans la base $\mathscr{E}$?
- Exprimer $u(\vec{e'}_1)$, $u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
- En déduire $u(\vec{e'}_1), u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
- En déduire A'.
- Calculer $P^{-1}AP$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.26 Ch2-Exercice26

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, montrer que Im A est un sous espace vectoriel. Montrer plus précisément que Im A = vect $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.27 Ch2-Exercice27

Déterminer le rang des matrices A suivantes :

– Si $E = E_1 \oplus E_2$, A est la matrice de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
– A est la matrice de la rotation dans le plan.
– $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

retour au cours

Solution

Exercice A.1.28 Ch2-Exercice28

On définit les 5 propositions :
a) f est injective.
b) f est surjective.
c) f est bijective.
d) f n'est pas injective.
e) f n'est pas surjective.

Dans chacun des cas suivants, énoncer parmi les 5 propositions lesquelles sont exactes (sans hypothèse supplémentaire)

1. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$
2. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
3. f est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$
4. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$
5. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
6. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$
7. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.29 Ch2-Exercice29

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{np}$, Ker A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p1}$.

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.1.30 Ch2-Exercice30

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

retour au cours

Solution

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

A.2 Exercices de TD

Exercice A.2.1 TD2-Exercice 1

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1 + x_2, -x_1 - x_2) \end{array}$

   (a) Montrer que f est une application linéaire.

   (b) Déterminer Ker f et Im f,
   (réponse : Ker $f = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, x_1 = -x_2\}$, Im $f = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2, y_1 = -y_2\}$).

   (c) Calculer $f \circ f$. Le résultat était-il prévisible ?

2. E, F, G étant des espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$, montrer que :

   $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \text{Im } f \subset \text{Ker } g$

Question 1a Aide 1
Question 1b Aide 1
Question 1c Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.2 TD2-Exercice 2

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_3 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4) \end{array}$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer une base de Ker f, (réponse : $((-2,-1,1,0),(1,2,0,1))$).
3. Déterminer une base de Im f, (réponse : $((1,1,1),(-1,0,1))$).
4. Vérifier que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 4$.

Question 1	Aide 1		
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.3 TD2-Exercice 3

1. E est un espace vectoriel, soit $u \in \mathscr{L}(E,E)$, on note $u \circ u = u^2$, montrer que :
   (a) $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$.
   (b) $\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u$.
   (c) $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2 \Longleftrightarrow \text{Im } u \cap \text{Ker } u = \{\vec{0}\}$.
   (d) $\text{Im } u = \text{Im } u^2 \Longleftrightarrow E = \text{Im } u + \text{Ker } u$.
2. Soit E un espace vectoriel On appelle *projecteur* tout élément $p \in \mathscr{L}(E,E)$ tel que $p \circ p = p$.
   (a) Montrer que si p est un projecteur alors $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.
   (b) Donner la décomposition unique de $\vec{x} \in E$.
   (c) En déduire que p est la projection sur $\text{Im } p$, parallèlement à $\text{Ker } p$

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1 Aide 2
Question 1c Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1d Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2a Aide 1 Aide 2
Question 2b Aide 1
Question 2c Aide 1

Exercice A.2.4 TD2-Exercice 4

1. Soit P_n l'espace vectoriel des polynômes p de degré inférieur ou égal à n.
   Soit $u \in \mathscr{L}(P_n, P_{n-1})$ définie par : $u(p) = p'$ dérivée de p.
   Donner une base $(\ldots, p_i, \ldots)$ de P_n.
   Calculer $(\ldots, u(p_i), \ldots)$ et montrer que cette famille est génératrice de P_{n-1}.
2. De façon plus générale, on suppose que $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
   (a) Montrer que l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de Im u.
   (b) Si $(u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p))$ est une famille génératrice de Im u,
   peut-on dire que $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ est une famille génératrice de E ?
   Si oui le démontrer, si non donner une condition supplémentaire sur u pour que la réponse soit oui.
   (c) L'image par u d'une famille génératrice de E est-elle génératrice de F ?

Question 1 Aide 1
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1 Aide 2
Question 2c Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.5 TD2-Exercice 5

Soit $u \in \mathscr{L}(E,E)$, $\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n$ des éléments de E. On définit les propositions suivantes
$P_1 : (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n)$ est libre.
$P_2 : (u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_n))$ est libre.

1. Démontrer une implication correcte entre P_1 et P_2
2. A quelle condition sur u a-t-on équivalence entre P_1 et P_2 ?

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6 TD2-Exercice 6

1. On définit les fonctions p_0, p_1, p_2, f_3, f_4 par

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, f_3(t) = e^t, f_4(t) = te^t.$$

   Soit la famille $\mathscr{F} = (p_0, p_1, p_2, f_3, f_4)$. Montrer que cette famille est libre.

2. Soit $E = \mathscr{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients réels et soit F l'espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{F}$.
   On définit u par $\qquad u(p) = f_3 p' + p \qquad$ où p' est la dérivée de p.

   (a) Montrer que u est linéaire de $E = \mathscr{P}_2$ dans F.

   (b) u est-elle injective ?

   (c) Donner une base de Im u,(réponse : $(p_0, p_1 + f_3, p_2 + 2f_4)$ est une base de Im u).

3. Donner la matrice A représentant u (préciser les bases choisies pour $\mathscr{P}_2$ et F), réponse :
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Etudier l'injectivité de u à l'aide de la matrice A.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.6
TD2-Exercice 6

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2b	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2c	Aide 1	Aide 2	
Question 3	Aide 1	Aide 2	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.7 TD2-Exercice 7

Soit $\mathscr{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré $\leq n$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_n$. On note p' la dérivée de p .
On définit u par $(u(p))(t) = p(t+1) - p(t) - p'(t)$

1. Montrer que u est linéaire de $\mathscr{P}_n$ dans $\mathscr{P}_{n-2}$.
2. On choisit $n = 4$. Donner la matrice A de u par rapport aux bases $\mathscr{B}_n$ et $\mathscr{B}_{n-2}$,
   réponse : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8 TD2-Exercice 8

1. On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
   On note E le sous ensemble de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ composé des matrices M qui peuvent s'écrire :
   $M=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}$ a et b étant 2 réels
   Est-ce que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$? Si oui, donner une base de E et sa dimension,(réponse : dimension 2).
2. On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   Questions : Pour chaque ensemble E défini ci-dessous, on montrera que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on donnera une base de E et sa dimension.
   (a) On appelle *trace* d'une matrice carrée, la somme des termes de la diagonale principale. On note $\mathcal{T}_n$ le sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ayant une trace nulle. Répondez aux *questions* pour $\mathcal{T}_n$,
   (réponse :la dimension vaut n^2-1).
   (b) Une matrice est dite *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si tous les termes au dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls. On note $\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{I}_n$) l'ensemble des matrices triangulaire supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Répondez aux *questions* pour $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{I}_n$,(réponse : la dimension vaut $\frac{n(n+1)}{2}$).
   (c) Soit $\mathcal{D}_n = \mathcal{S}_n \cap \mathcal{I}_n$ l'ensemble des matrices diagonales. Répondez aux *questions* pour $\mathcal{D}_n$,(réponse :la dimension vaut n).
   (d) Une matrice A est dite *symétrique* si, $\forall i, j \in [1..n]$, $a_{ij} = a_{ji}$.
   Elle est dite antisymétrique si, $\forall i, j \in [1..n]$, $a_{ij} = -a_{ji}$.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.8
TD2-Exercice 8

On note $\mathscr{Y}_n$ (resp. $\mathscr{A}_n$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Répondez aux *questions* pour $\mathscr{Y}_n$ et $\mathscr{A}_n$, (réponse : les dimension respectives sont $\frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n-1)}{2}$).

(e) Montrez que $\mathscr{M}_{n,n} = \mathscr{Y}_n \oplus \mathscr{A}_n$.

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2a	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2b	Aide 1		
Question 2c	Aide 1		
Question 2d	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 2e	Aide 1	Aide 2	

Exercice A.2.9 TD2-Exercice 9

Soit A une matrice donnée de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et u_A l'application de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ définie par :

$$u_A(X) = XA - AX.$$

1. Montrez que u_A est linéaire pour toute matrice A.
2. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Donnez une base de Ker u_A. En déduire sa dimension.

   Réponse : base de Ker u_A est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right)$, la dimension est 2.
3. On prend A de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

   Déterminer a et b tels que $AX = XA$, $\forall X \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Question 1 Aide 1
Question 2 Aide 1 Aide 2
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.10 TD2-Exercice 10

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Comparer les traces de AB et BA.
2. Vérifier ce résultat en explicitant AB et BA quand $m = 1$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.11 TD2-Exercice 11

1. Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, calculer $(A+B)^2$.
   On note $I = A^0$ la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. A quelle condition est-il possible d'utiliser la formule du binôme pour calculer $(A+B)^n$?
2. On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer J^2 et montrer que $A^n = 3^n I + a_n J$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.12 TD2-Exercice 12

Soit $\mathscr{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de matrice A relativement à $\mathscr{E}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. On se donne le vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Calculez $u(\vec{x})$.
2. En déduire le noyau de u (on pourra en donner une base), (réponse : une base de Ker u est $((1,-1,1))$).
3. On pose $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e'}_2 = \vec{e}_2$ et $\vec{e'}_3 = \vec{e}_3$.
   (a) Montrez que $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Exprimer $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ en fonction de $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$
   (c) Utiliser les questions précédentes pour obtenir la matrice A' de u dans la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
   Réponse : $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.
4. On définit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Que vaut P^{-1} ?

   réponse : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Quelle relation lie A, A', P, P^{-1} ?

Question 1	Aide 1			
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 3a	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 3c	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 5	Aide 1			

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.13 TD2-Exercice 13

On se place dans $\mathbb{R}^3$. On rappelle que si $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ alors
– le produit scalaire de $\vec{x}$ par $\vec{y}$ est donné par $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$,
– la norme de $\vec{x}$ est égale à $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$
On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique (elle est orthonormée).
On note ρ la rotation d'angle θ autour du vecteur $\vec{\omega} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

1. On pose $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1, \vec{e'}_2 = \vec{\omega}$, déterminer $\vec{e'}_3$ tel que la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ soit orthonormée directe.
2. Ecrivez la matrice R' de la rotation ρ dans la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
3. Donnez la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ à la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.
4. Ecrivez la matrice R de la rotation ρ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
   réponse : $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2
Question 4 Aide 1 Aide 2 Aide 3

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14 TD2-Exercice 14

1. Déterminer le rang de la matrice A obtenue dans l'exercice A.2.6 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (réponse : 3).

2. Déterminer le rang de la matrice A obtenue dans l'exercice A.2.7 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

   (réponse : 3).

3. Déterminer le rang de la matrice M obtenue dans la première question de l'exercice A.2.8 (réponse : si $a = b = 0$, le rang est nul, il vaut 2 sinon).
4. Déterminer le rang de la matrice A obtenue dans l'exercice A.2.12, (réponse : 2).
5. Déterminer le rang de la matrice R obtenue dans l'exercice A.2.13 (réponse : 3)

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.14
TD2-Exercice 14

Question 1	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 3	Aide 1	Aide 2	Aide 3	
Question 4	Aide 1	Aide 2	Aide 3	Aide 4
Question 5	Aide 1	Aide 2	Aide 3	

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.15 TD2-Exercice 15

Soient E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$.

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de Ker u, (réponse : $\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4$).
2. Déterminer une base de Im u, (réponse : $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$).
3. Quel est le rang de u ?

Question 1	Aide 1	Aide 2	
Question 2	Aide 1	Aide 2	Aide 3
Question 3	Aide 1		

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.16 TD2-Exercice 16

1. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls.
   Montrez que rang $(V_1 {V_2}^T) = 1$.
2. Reciproquement, montrez que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et rang $(A) = 1$, alors $\exists V_1, V_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : A = V_1 {V_2}^T$.
3. Application : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Question 1 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 2 Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 3 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.17 TD2-Exercice 17

Soit $u \in \mathscr{L}(E,E)$ vérifiant $u^2 = u$, montrer directement (sans utiliser l'exercice A.2.3) que :

1. $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\vec{0}\}$.
2. $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Question 1 Aide 1 Aide 2
Question 2 Aide 1 Aide 2

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Exercice A.2.18 TD2-Exercice 18

Soient E, F, G, H des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$.
   (a) Montrer que Ker $u \subset$ Ker $(v \circ u)$
   (b) On suppose que v est bijective.
   – Montrer que Ker $u =$ Ker $(v \circ u)$.
   – En déduire que u et $v \circ u$ ont le même rang.
   (c) Soit B une matrice inversible, montrer que A et BA ont le même rang (pour toute matrice A pour laquelle le produit est possible)
2. Soit $w \in \mathcal{L}(H,E)$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
   (a) Montrer que Im $(u \circ w) \subset$ Im u.
   (b) On suppose que w est bijective.
   – Montrer que Im $(u \circ w) =$ Im u.
   – En déduire que u et $u \circ w$ ont le même rang.
   (c) Soit B une matrice inversible, montrer que A et AB ont le même rang (pour toute matrice A pour laquelle le produit est possible).

Question 1a Aide 1 Aide 2
Question 1b Aide 1 Aide 2 Aide 3
Question 1c Aide 1
Question 2a Aide 1
Question 2b Aide 1
Question 2c Aide 1

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe B
Exemples

B.1 Exemples du chapitre 2

Exemple B.1.1

Soit $E = F \oplus G$ muni de la base $\mathscr{E} = \mathscr{F} \cup \mathscr{G}$ ($\mathscr{F}$ base de F, $\mathscr{G}$ base de G) avec $\mathscr{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, $\mathscr{G} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2)$ ($\dim E = 5$, $\dim F = 3$, $\dim G = 2$). On reprend l'exemple de la projection. La matrice de u, projection sur F parallèlement à G, s'écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puisque $u(\vec{f}_j) = \vec{f}_j$, pour $j = 1, 2, 3$ et $u(\vec{g}_k) = \vec{0}$, pour $k = 1, 2$.

retour au cours

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Annexe C
Documents

C.1 Documents du chapitre 2

Document C.1.1 Anneaux $\mathscr{L}(E;E)$

Si $F = E$ on peut munir $\mathscr{L}(E;E)$ d'une structure d'anneau pour la loi de composition des applications. On notera i_E l'application identité de E dans E : c'est l'élément neutre pour la loi "$\circ$" de l'anneau.
Attention : cet anneau n'est pas commutatif.
Exemple : dans le plan, si on compose une rotation et une projection, ces deux applications ne commutent pas en général.

retour au cours

Index des concepts

Le gras indique un grain où le concept est défini ; l'italique indique un renvoi à un exercice ou un exemple, le gras italique à un document, et le romain à un grain où le concept est mentionné.

Sommaire
Concepts

Exemples
Exercices
Documents

Solution de l'exercice A.1.1

1) non, 2) non si $\beta \neq 0$, oui si$\beta = 0$ 3) 4) 5) oui, 6) non, 7) oui.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.3

2) - si $\alpha = \beta = 0$, Ker $u = \mathbb{R}$, Im $u = \{\vec{0}\}$,
- si $\alpha \neq 0, \beta = 0$ Ker $u = \{\vec{0}\}$, Im $u = \mathbb{R}$.

3) Ker $u = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0\}$, Im $u = \mathbb{R}$.

4) Ker $u = \Delta$, Im $u = \Pi$.

5) Ker $u = \mathscr{P}_0$ (polynômes constants), Im $u = \mathscr{P}_{n-1}$.

7) Ker $u = \{\phi \in \mathscr{C}(0,1) | \int_0^1 \phi(t)\, dt = 0\}$, Im $u = \mathbb{R}$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.4

- On suppose que $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)$ est une famille liée de E, donc il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ non tous nuls tels que : $\lambda_1\vec{x}_1+\dots+\lambda_p\vec{x}_p=\vec{O}$ on a donc $u(\lambda_1\vec{x}_1+\dots+\lambda_p\vec{x}_p)=\vec{O}$ et donc $\lambda_1 u(\vec{x}_1)+\dots+\lambda_p u(\vec{x}_p)=\vec{O}$, ce qui montre que $(u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_p))$ est une famille liée.
- On commence par remarquer que les vecteurs $u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_p)$ appartiennent à $\mathrm{Im}\, u$.
  De plus soit $\vec{y}\in \mathrm{Im}\, u$ alors il existe $\vec{x}\in E$ tel que $\vec{y}=u(\vec{x})$. Si $(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)$ est une famille génératrice de E , $\vec{x}$ peut s'écrire $\vec{x}=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\vec{x}_i$, on a donc $\left\{\begin{array}{l}\vec{y}=u(\vec{x})=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i u(\vec{x}_i)\\ u(\vec{x}_i)\in \mathrm{Im}\, u\end{array}\right.$ donc $(u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, u$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.5

On vérifie facilement que $u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}), u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$
Im $u = F_1$, Ker $u = F_2$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.6

On a bien sûr $u(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$, donc $u \circ u(\vec{x}) = u(\vec{x}) \forall \vec{x} \in E$ on a donc $u \circ u = u$. Vous pouvez illustrer ce résultat en pensant aux projections géométriques classiques sur un plan ou une droite.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.7

$$\left.\begin{cases} (u\circ v)(\vec{x}+\vec{y}) = (u\circ v)(\vec{x}) + (u\circ v)(\vec{y}) \\ (u\circ v)(\lambda\vec{x}) = \lambda(u\circ v)(\vec{x}) \end{cases}\right\}$$ ces 2 propriétés se vérifient très facilement.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.8

$u(\vec{x}) = u(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 u(\vec{e}_1) + x_2 u(\vec{e}_2) + x_3 u(\vec{e}_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\vec{f}_1 + (x_1 - x_2 - 2x_3)\vec{f}_2.$
On voit donc que la donnée de $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3)$ définit $u(\vec{x})$ pour tout $\vec{x}$.
(A condition bien sûr de connaitre les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{E}$)

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.9

1. (a) On sait que si u est injective, on a $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ libre $\Longrightarrow (u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p))$ libre,
   donc en utilisant la contraposée :
   $(u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_p))$ liée $\Longrightarrow (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ liée

   (b) Une base de E est une famille libre, donc son image par u est une famille libre puisque u est injective.
   Une base de E est une famille génératrice de E, donc son image par u est une famille génératrice de Im u.
   L'image d'une base de E est donc une base de Im u.

2. (ii)$\Rightarrow$(i) - Soit $\vec{x}$ un vecteur tel que $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$, on peut alors décomposer ce vecteur sur la base $\mathscr{E}$:
   $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j$ et $\vec{0}_F = u(\vec{x}) = u(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j u(\vec{e}_j)$ et comme la famille $u(\mathscr{E})$ est libre par hypothèse cela implique que
   $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, soit $\vec{x} = \vec{0}_E$ et donc Ker $u = \{\vec{0}_E\}$.

   (i)$\Rightarrow$(ii) - Puisque E est de type fini, il existe une base $\mathscr{B}$ de E, cette base est une famille libre, donc d'après la proposition 2.1.6 son image par u est une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.10

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i)} \Longrightarrow u \text{ est injective } \Longrightarrow \text{ l'image d'une famille libre est libre}\\ \text{(i)} \Longrightarrow u \text{ est surjective } \Longrightarrow \text{ l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de F}\end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow$ l'image d'une base de E est une base de F

Réciproquement : Soit $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$ une base de E. On suppose que l'image par u de cette base de E est une base de F

– Montrons que $\operatorname{Ker} u = \vec{0}_E$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F\\ \vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{x}_i) = \vec{0}_F \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}_E.$$

(On a utilisé l'hypothèse que $(u(\vec{x}_1),\ldots,u(\vec{x}_n))$ est une base donc libre).

On vient donc de montrer que $\operatorname{Ker} u = \vec{0}_E$ donc u est injective.

– Montrons que $\operatorname{Im} u = F$

$(u(\vec{x}_1),\ldots,u(\vec{x}_n))$ est une base de F donc $\forall \vec{y} \in F, \vec{y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{x}_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i\right)$ donc $\vec{y} \in \operatorname{Im} u$.

On vient de montrer que $\operatorname{Im} u = F$, donc que u est surjective.

Ce qui termine de démontrer l'équivalence.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.11

On démontre facilement que : $\left\{\begin{array}{l} u(\vec{x}) = \vec{0}_F \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E \text{ donc Ker } u = \{\vec{0}_E\} \\ \forall \vec{y} \in F, \exists \vec{x}, \vec{y} = u(\vec{x}) \text{ donc Im } u = F \end{array}\right.$ donc u est bijective.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.12

Comme tout $\vec{x} \in E$ admet une décomposition unique sur la base $\mathscr{E}$ l'application $\vec{x} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ est bien définie. On montre facilement qu'elle est linéaire et injective et surjective.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.13

$i_E(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ donc $A = I$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.14

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.15

$\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ donc $u(\vec{x}) = u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) + 2u(\vec{e}_3)$

Or d'après la définition de A on a : $\left\{ \begin{array}{lcl} u(\vec{e}_1) & = & 3\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_2) & = & 4\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_3) & = & 5\vec{f}_1 + 6\vec{f}_2 \end{array} \right.$

On déduit donc de tout ce qui précède : $u(\vec{x}) = 9\vec{f}_1 + 11\vec{f}_2$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.16

Pour obtenir A il suffit de déterminer $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4)$.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} u(\vec{e}_1) & = & (1,1,1) & = & \vec{f}_1+\vec{f}_2+\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_2) & = & (-1,2,1) & = & -\vec{f}_1+2\vec{f}_2+\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_3) & = & (1,0,3) & = & \vec{f}_1+3\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_4) & = & (1,-1,-3) & = & \vec{f}_1-\vec{f}_2-3\vec{f}_3 \end{array}\right. .\text{D'où } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bien sûr pour obtenir $u(\vec{e}_1)$, on écrit $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$ donc $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Vous pourrez revenir à cet exrcice après avoir étudié le calcul explicite de l'image d'un vecteur.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.17

1. On démontre facilement que la somme est une loi de composition interne, associative, la matrice E dont tous les termes sont nuls (on la note $E=0$) est l'élément neutre, la matrice B dont les termes sont les opposés de ceux de A (B=-A) est le symétrique de A. On a de plus
$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A), (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A, \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B, 1A=A$
2. Si l'on note E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme situé en ligne i et colonne j qui vaut 1, alors $A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$. La famille $(E_{ij}, 1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$ est donc génératrice, on montre facilement qu'elle est libre : c'est donc une base , la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$ est donc mn.

Retour à l'exercice ▲

- $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

  Une disposition pratique pour ce dernier produit est la suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \times & \times \\ \otimes & \times \\ \times & \times \end{pmatrix} \end{array}$$

  Le terme $\otimes$ est obtenu par produit terme à terme de la ligne de A et de la colonne de B situées dans son prolongement. C'est-à-dire $\otimes = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1$. Bien sûr cette disposition qui est pratique quand on débute se revèle rapidement encombrante !

  On ne peut pas effectuer le produit BA.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.19

1. $BD' = \begin{pmatrix} 5B_1 & 6B_2 \end{pmatrix}$: le produit à droite d'une matrice B par une matrice diagonale D' revient à multiplier chacune des colonnes B_i par le scalaire d'_{ii}.
$DB = \begin{pmatrix} 2\underline{B}_1 \\ 3\underline{B}_2 \\ 4\underline{B}_3 \end{pmatrix}$: le produit à gauche d'une matrice B par une matrice diagonale D, revient à multiplier chacune des lignes $\underline{B}_i$ par le scalaire d_{ii}.

2. $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce résultat se généralise bien sûr à une matrice B quelconque.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.20

On a $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $AX = Y \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ donc $u(\vec{x}) = (9, 11) = 9\vec{f}_1 + 11\vec{f}_2$. On retrouve bien sûr le même résultat.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.21

On pose $M = AB$, $N = B^{-1}A^{-1}$, on montre en utilisant l'associativité que $MN = NM = I$, donc $N = (M)^{-1}$: $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.22

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \underline{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{B}_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}, \underline{B^T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \underline{B^T}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B^T)_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (B^T)_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (B^T)_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\left(\underline{B}_1\right)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left(\underline{B}_2\right)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \left(\underline{B}_3\right)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B_1)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, (B_2)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.23

1. On montre que $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$ est une famille libre, en effet $\lambda_1 \vec{e'}_1 + \lambda_2 \vec{e'}_2 = \vec{O} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   (Il suffit en effet d'exprimer $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ en fonction de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$).
   Or une famille libre à 2 éléments est une base.
2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.24

1. $\begin{cases} \vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e'}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{1}{3}\vec{e'}_1 + \frac{1}{3}\vec{e'}_2 \\ \vec{e}_2 = \frac{2}{3}\vec{e'}_1 - \frac{1}{3}\vec{e'}_2 \end{cases}$

2. $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = x_1\left(\frac{1}{3}\vec{e'}_1 + \frac{1}{3}\vec{e'}_2\right) + x_2\left(\frac{2}{3}\vec{e'}_1 - \frac{1}{3}\vec{e'}_2\right) = \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)\vec{e'}_1 + \left(\frac{1}{3}\vec{x}_1 - \frac{1}{3}x_2\right)\vec{e'}_2$ donc
   $x'_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$, $x'_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$

3. $PX' = \begin{pmatrix} x'_1 + 2x'_2 \\ x'_1 - x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X$

4. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on a obtenu P^{-1} à partir de 1. On vérifie bien sûr que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.25

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
- $u(\vec{e'}_1) = u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $u(\vec{e'}_2) = 2u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) = 7\vec{e}_2$
- $u(\vec{e'}_1) = \vec{e'}_1 + \vec{e'}_2 + \frac{4}{3}\vec{e'}_1 - \frac{2}{3}\vec{e'}_2 = \frac{7}{3}\vec{e'}_1 + \frac{1}{3}\vec{e'}_2$, $u(\vec{e'}_2) = \frac{14}{3}\vec{e'}_1 - \frac{7}{3}\vec{e'}_2$
- $A' = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

Retour à l'exercice ▲

On démontre immédiatemment que Im A est un sous espace vectoriel. On a de plus :
$Y \in \text{Im } A \Longleftrightarrow Y = AX \Longleftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$ avec $x_i \in K \Longleftrightarrow Y \in \text{vect}\,\langle A_1, \dots, A_n \rangle$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.27

- rang $A = \dim E_1$
- rang $A = 2$
- rang $A = 2$ car (A_1, A_2, A_3) est une famille liée et que (A_1, A_2) est une famille libre.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.28

1. e)
2. rien sans hypothèses supplémentaires
3. d)
4. a) e)
5. a), b), c)
6. b), d)
7. a), b), c)

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.29

Ker A n'est pas vide puisque $0 \in \text{Ker } A$.
On vérifie de plus la stabilité
Si $X, X' \in \text{Ker } A, a \in K$ alors $X + X' \in \text{Ker } A, aX \in \text{Ker } A$.

Retour à l'exercice ▲

Solution de l'exercice A.1.30

On constate que la recherche du noyau de A revient à chercher les coefficients x_1, x_2, x_3 qui vérifient $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0$, ce qui revient à étudier si les colonnes A_1, A_2, A_3 forment un famille libre, ce qui permet de savoir si le rang de A vaut 3.
Dans le cas de A on trouve des coefficients non nuls possibles, donc Ker $A \neq \{0\}$,ou encore rang $A < 3$, ce qui permet de conclure que A n'est pas inversible.
Dans le cas de B, la seule solution est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc B est inversible.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Application linéaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.1

Montrer que

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\{\exists \vec{x}, \vec{y} = f(\vec{x})\} \Longleftrightarrow y_1 = y_2$$

Attention, montrez bien les équivalences . En déduire Ker f et Im f.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.1

On a montré $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, quelle conséquence cela a-t-il sur $f \circ f$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.1

Raisonnez précisément par équivalences.

Retour à l'exercice ▲

- Que signifie qu'une application est nulle ?
- Quelle est la définition de $g \circ f$?
- Quelle est la définition de $\operatorname{Im} f$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe "Application linéaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Ecrire les conditions pour que $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, f$, en déduire une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\, f$, montrer que cette famille est libre.

Retour à l'exercice ▲

En raisonnant par équivalences montrer par exemple que

$$\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \vec{x} = x_3\, \vec{f_3} + x_4\, \vec{f_4} \text{ avec } \vec{f_3} = (-2,-1,1,0)\,,\, \vec{f_4} = (1,2,0,1)\,.$$

Vérifier que $\vec{f_3}, \vec{f_4} \in \operatorname{Ker} f$ et qu'ils forment une famille libre. Conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.2

Voir le paragraphe "Noyau et image". .

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.2

Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3, Exercice A.2.2

Calculer $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3), f(\vec{e}_4)$ et extraire de cette famille génératrice une base de Im f. Bien sûr la base de Im f n'est pas unique, il se peut que vous obteniez une base de Im f différente de celle proposée dans la solution. Dans tous les cas toutes les bases ont le même nombre de vecteurs, si vous trouvez que $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$ est une base de Im f, vous devez montrer que les vecteurs $\vec{g}'_1 = (1,1,1), \vec{g}'_2 = (-1,0,1)$ sont des combinaisons linéaires de $\vec{g}_1, \vec{g}_2$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.3

Montrer que si $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$ alors $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u^2$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.3

Si u est linéaire , on a toujours $u(\vec{0}) = \vec{0}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.3

Montrer que si $\vec{y} \in \operatorname{Im} u^2$ alors $\vec{y} \in \operatorname{Im} u$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.3

$u^2(\vec{x}) = u(u(\vec{x}))$.

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1c, Exercice A.2.3

Proposez une démonstration claire, la rigueur de la rédaction est ici très importante. Par exemple, pour montrer que la proposition P implique la proposition Q, montrez que Q (la conclusion) est vraie en utilisant le fait que P (l'hypothèse) est vraie. Pour montrer que 2 propositions sont équivalentes on démontre souvent une double implication.
Pour démontrer que $A \subset B$ il faut montrer que tout élément de A appartient à B (en général ceci se démontre par une série d'implications).
Pour démontrer que $A = B$, on peut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$ comme précédemment. Ou encore on montre que $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$ (on utilise alors une série d'équivalences).

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1c, Exercice A.2.3

Supposer que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$, prendre un élément quelconque de $\text{Im } u \cap \text{Ker } u$, montrer que cet élément est nul (en utilisant bien sûr l'hypothèse $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$).
Démontrer ensuite la réciproque, c'est-à-dire on suppose que $\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \vec{0}$ et on montre que $\text{Ker } u = \text{Ker } u^2$ (par double inclusion, penser aux questions qui ont été traitées avant).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1d, Exercice A.2.3

Revoir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1d, Exercice A.2.3

Proposez une démonstration claire, la rigueur de la rédaction est ici très importante. Par exemple, pour montrer que la proposition P implique la proposition Q, montrez que Q (la conclusion) est vraie en utilisant le fait que P (l'hypothèse) est vraie. Pour montrer que 2 propositions sont équivalentes on démontre souvent une double implication.
Pour démontrer que $A \subset B$ il faut montrer que tout élément de A appartient à B (en général ceci se démontre par une série d'implications).
Pour démontrer que $A = B$, on peut montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$ comme précédemment. Ou encore on montre que $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$ (on utilise alors une série d'équivalences).

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1d, Exercice A.2.3

On suppose que $\text{Im } u = \text{Im } u^2$.
On choisit $\vec{x} \in E$, on sait (pourquoi ?) $\exists \vec{z} \in E, u(\vec{x}) = u^2(\vec{z})$. On peut alors écrire que $\vec{x} = u(\vec{z}) + (\vec{x} - u(\vec{z}))$! En déduire que $E = \text{Im } u + \text{Ker } u$.
Réciproquement, on suppose que $E = \text{Im } u + \text{Ker } u$.
Soit $\vec{x} \in \text{Im } u$ alors $\exists \vec{z}_1 \in \text{Im } u, \vec{z}_2 \in \text{Ker } u$ tels que $\vec{x} = u(\vec{z}_1 + \vec{z}_2)$. Pourquoi ?
En déduire qu'il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x} = u^2(y)$ et donc que $\vec{x} \in \text{Im } u^2$.
On en déduit que $\text{Im } u \subset \text{Im } u^2$.
En utilisant les questions précédentes on obtient l'égalité des deux ensembles.

Retour à l'exercice ▲

Revoir dans le chapitre 1 la définition de somme directe.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.3

On a alors $p^2 = p$, on peut utiliser 1(c) et 1(d) et conclure.

Retour à l'exercice ▲

Inspirez-vous de l'aide 3 de la question 1(d).

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.3

Revoir le paragraphe "Projection".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.4

Quelle est la base canonique de P_n ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.4

Voir l'exercice A.1.4

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.4

Essayez de démontrer cette propriété sans hypothèse supplémentaire. Si vous n'y arrivez pas, essayez de trouver un contre-exemple pour prouver qu'elle est fausse.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2b, Exercice A.2.4

La question 1 fournit un contre-exemple.
On cherche l'hypothèse supplémentaire :
Soit $\vec{x} \in E$ alors $u(\vec{x})$ s'écrit $u(\vec{x}) = \alpha_1 u(\vec{x}_1) + \ldots + \alpha_p u(\vec{x}_p)$. Pourquoi ?
Quelle hypothèse faut-il ajouter pour pouvoir déduire que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \ldots + \alpha_p \vec{x}_p$?

Retour à l'exercice ▲

Revoir la question 2(a).

Retour à l'exercice ▲

A-t-on $\operatorname{Im} u = F$?

Retour à l'exercice ▲

Si u n'est pas surjective, la réponse est "non".

Retour à l'exercice ▲

Une des implications découle immédiatement du théorème 2.1.1.

Retour à l'exercice ▲

$P_2 \Rightarrow P_1$ est la contraposée de la première assertion du théorème 2.1.1. Donc l'implication est démontrée. Essayez maintenant de la démontrer directement sans utiliser le théorème.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.5

On suppose que P_2 est vraie, on doit montrer que

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.5

N'avez-vous pas déjà démontré dans le cours que sous certaines hypothèses $P_1 \Rightarrow P_2$?

Retour à l'exercice ▲

Revoir l'exercice A.1.9

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.6

Voir la définition de "famille libre" dans le chapitre 1.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.6

On rappelle que si une fonction est nulle alors sa dérivée est nulle. Attention, faites bien la différence entre "f est la fonction nulle" et "la fonction f s'annule pour la valeur $t = 75$".

Retour à l'exercice ▲

Utiliser les dérivées et des valeurs particulières de t.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.6

Revoir le paragraphe "Injective" .

Retour à l'exercice ▲

On note 0 l'application nulle.
Ecrire $u(p) = 0$

Retour à l'exercice ▲

Utiliser 1. pour montrer que $u(p) = 0 \Longleftrightarrow p = 0$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.6

Revoir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l'exercice ▲

Calculer l'image par u des éléments de $\mathscr{F}$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.6

Calculer l'image des vecteurs de base de $\mathscr{P}_2$ et calculer leurs composantes dans une base de F.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 4, Exercice A.2.6

Utiliser A pour traduire $u(p) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Calculer AX.

Retour à l’exercice ▲

Montrer que $AX = 0 \Longleftrightarrow X = 0$.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Application linéaire-définition".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.7

N'oubliez pas que $u(p+q), u(p), u(q), u(\lambda p)$ sont des polynômes. On rappelle que pour montrer l'égalité de deux polynômes p_1 et p_2 par exemple, il faut montrer que $p_1(t) = p_2(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$.
N'oubliez pas de montrer que $u(p) \in \mathcal{P}_{n-2}$, pour cela décomposez p sur la base canonique.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.7

Calculer les composantes de $u(p_0), u(p_1), \ldots, u(p_4)$ dans la base de $\mathscr{P}_{n-2}$ et rangez ces coefficients correctement dans la matrice A.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.8

Revoir dans le chapitre 1 la caractérisation de sous-espace vectoriel et la définition de base.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.8

On obtient facilement une famille génératrice de E. Montrer ensuite que cette famille génératrice est libre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.8

On écrit $M = aA + bB$ (une base de E est constituée de matrices de E).

Retour à l'exercice ▲

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2a, Exercice A.2.8

Choisir par exemple $n = 3$, soit $M \in \mathcal{T}_3$, et traduire cette propriété sur les coefficients de M.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2a, Exercice A.2.8

On a $m_{33} = -m_{11} - m_{22}$ donc en utilisant les notations classiques E_{ij},
$M = m_{11}(E_{11} - E_{33}) + m_{22}(E_{22} - E_{33}) + m_{12}E_{12} + m_{13}E_{13} + m_{21}E_{21} + m_{23}E_{23} + m_{31}E_{31} + m_{32}E_{32}$. On démontre facilement que les 8 matrices qui interviennent dans la décomposition précédente appartiennent à $\mathcal{T}_3$ et qu'elles forment une famille libre, c'est donc une base.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.8

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel et reprendre les notations de l'exercice A.1.17.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2c, Exercice A.2.8

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel et reprendre les notations de l’exercice A.1.17.

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 2d, Exercice A.2.8

Revoir la caractérisation de sous-espace vectoriel et reprendre les notations de l'exercice A.1.17.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2d, Exercice A.2.8

Si A est symétrique montrer que l'on peut écrire

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} + \ldots + a_{nn}A_{nn}$$

où $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}, A_{22}, \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{nn}$ sont des matrices symétriques à déterminer à l'aide des notations de l'exercice A.1.17. Si vous ne voyez pas avec n quelconque, traitez d'abord un cas particulier : $n = 3$ par exemple.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2d, Exercice A.2.8

Montrer que la famille $(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}, A_{22}, \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{nn})$ est libre. Conclure que la dimension de $\mathscr{Y}_n$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. Démontrer de façon similaire que la dimension de $\mathscr{A}_n$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2e, Exercice A.2.8

Montrer que $\mathscr{Y}_n \cap \mathscr{A}_n = \{\vec{0}\}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2e, Exercice A.2.8

Quelle est la dimension de $\mathcal{Y}_n \oplus \mathcal{A}_n$? En déduire que $\mathcal{M}_{n,n} = \mathcal{Y}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
Par curiosité , étant donné $M \in \mathcal{M}_{n,n}$, essayez de construire $Y \in \mathcal{Y}_n$, $A \in \mathcal{A}_n$ tels que $M = Y + A$. Vous pouvez vous inspirer de ce qui a été fait pour les fonctions paires et impaires dans le chapitre précédent.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.9

Vérifier que

$$u_A(X+Y) = u_A(X) + u_A(Y)$$

$$u_A(\lambda X) = \lambda u_A(X)$$

N'oubliez pas que X, Y sont des matrices.

Retour à l'exercice ▲

Ecrire $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et trouver les conditions sur x, y, z, t pour que $u_A(X) = 0$.

Retour à l'exercice ▲

On obtient $\left\{\begin{array}{c} 2y+z=0 \\ t-x=0 \end{array}\right.$.

En déduire une famille génératrice de Ker u_A et montrer que cette famille est libre.

Attention, vos calculs vous ont peut-être conduit à une autre base (Y_1, Y_2) que la base (X_1, X_2) proposée en solution.

Dans ce cas, vérifiez que les vecteurs X_1, X_2 sont des combinaisons linéaires des vecteurs Y_1, Y_2.

Retour à l'exercice ▲

Avant tout calcul, voyez-vous une matrice particulière A qui vérifie $AX = XA$, $\forall X$?

Retour à l'exercice ▲

Si $A = I$ ou $A = \lambda I$, la propriété est démontrée.
On va montrer maintenant qu'il n'existe pas d'autres matrices qui vérifient cette propriété.
Choisir $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, traduire $AX = XA$ et ne pas oublier que l'égalité doit être vraie pour tout X.

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Produit de deux matrices".

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.10

Donner l'expression du terme de AB qui se trouve en ligne i et colonne i. Même question pour le terme de BA.

Retour à l'exercice ▲

Calculer les traces et comparer.

Retour à l'exercice ▲

Attention AB est un scalaire et BA est une matrice.
Que vaut AB ?
Expliciter les termes de BA et conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.11

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.11

Utiliser la distributivité du produit par rapport à la somme.
Attention le produit n'est pas commutatif.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.11

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

La formule du binôme serait :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Lorsque $AB = BA$ on dit que A et B commutent, la formule du binôme est alors valable pour $n = 2$.
Vérifiez maintenant par récurrence que lorsque A et B commutent, la formule est valable pour n quelconque.On rappelle la formule du binôme :

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i.$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.11

Ecrire A comme une somme de 2 matrices et utiliser ce qui précède.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.11

Avez-vous vérifié que les conditions énoncées pour appliquer la formule du binôme étaient satisfaites ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Calcul explicite de l’image d’un vecteur".

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.12

Voir le paragraphe "Noyau et image".

Retour à l’exercice ▲

Trouver les conditions pour que $u(\vec{x}) = \vec{0}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.12

En écrivant les conditions pour que $u(\vec{x}) = \vec{0}$, on trouve une famille libre, génératrice de Ker u.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3a, Exercice A.2.12

Comment allez-vous caractériser une base ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3a, Exercice A.2.12

Connaissez-vous la dimension de $\mathbb{R}^3$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3a, Exercice A.2.12

Montrer que la famille $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ est libre.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3c, Exercice A.2.12

Calculez les composantes de $u(\vec{e'}_1), u(\vec{e'}_{2)}, u(\vec{e'}_3)$ dans la base $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 3c, Exercice A.2.12

Pensez à utiliser la linéarité de u, les composantes de $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_{2)}, u(\vec{e}_3)$ dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, et enfin les composantes de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dans la base $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3$.

Retour à l'exercice ▲

Revoir le paragraphe "Matrice de passage".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.12

Qu'est ce qui relie cette matrice aux questions précédentes ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4, Exercice A.2.12

Il n'y a aucun calcul nouveau, utilisez la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 4, Exercice A.2.12

Les colonnes de P^{-1} contiennent les composantes des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ dans la base $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$.

Retour à l’exercice ▲

Voir le paragraphe "Changement de bases et matrice associée à une application linéaire".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.13

Rappeler la définition de "base orthonormée directe".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.13

Vérifiez que $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ sont orthonormés. Rappelez vos souvenirs de géométrie pour construire $\vec{e'}_3$

Retour à l'exercice ▲

Utilisez le produit vectoriel.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Matrices-définitions".

Retour à l'exercice ▲

Que vaut $\rho(\vec{e'}_1), \rho(\vec{e'}_2), \rho(\vec{e'}_3)$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.13

Faites une figure pour vous aider.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.13

Voir le paragraphe "Matrice de passage".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.13

Rappelez les composantes de $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, , \vec{e'}_3$ dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, , \vec{e}_3$. En déduire P.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Changement de bases et matrice associée à une application linéaire".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 4, Exercice A.2.13

Comment allez-vous déterminer P^{-1} ? Est-ce une matrice de passage ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 4, Exercice A.2.13

Effectuez le produit $PR'P^{-1}$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.14

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Dans l'exercice A.2.6, vous avez démontré des résultats sur u.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.14

Que vaut la dimension de Im u ?

Retour à l'exercice ▲

Pouvait-on travailler directement sur les colonnes ou lignes de A ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.14

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Pourquoi peut-on affirmer que rang $A \leq 3$?

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.14

Comment voit-on immédiatement que rang $A \geq 1$?

Retour à l'exercice ▲

Etudiez plus précisément les colonnes de A pour conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.14

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l’exercice ▲

Est ce que l'on peut avoir rang $M = 0$?

Retour à l'exercice ▲

Discuter suivant les valeurs de a et b.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

A et A' sont semblables.

Retour à l'exercice ▲

Travailler sur les colonnes de A'.

Retour à l'exercice ▲

Aide 4, Question 4, Exercice A.2.14

Avait-on obtenu dans l'exercice A.2.12 des résultats sur u vous permettant de conclure quant au rang de A ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 5, Exercice A.2.14

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Pensez à u.

Retour à l’exercice ▲

On aurait pu aussi étudier R'.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Calcul explicite de l'image d'un vecteur".

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.15

Montrer que :

$$u(\vec{x}) = \vec{0}_F \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = -x_4 \end{array} \right.$$

Bien raisonner par équivalences.

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.15

Si on a étudié le chapitre 2 jusqu'au bout, on peut utiliser les résultats démontrés dans le paragraphe "Rang et dimension du noyau". On en déduit que Im $u = F$, pourquoi ? Donc $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est une base de Im u.
Essayons maintenant de résoudre cet exercice sans connaître ce résultat.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 2, Exercice A.2.15

$(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4))$ est génératrice de Im u, elle ne peut pas être libre : pourquoi ? Montrez que la famille $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3)$
est libre.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.15

La famille $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3))$ est génératrice de Im u, pourquoi ?
C'est donc une base de Im u.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang" et utiliser la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l’exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.16

Expliciter les colonnes de $V_1 V_2^T$ à l'aide de V_1 et des composantes de V_2.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 1, Exercice A.2.16

Montrer que toutes les colonnes de $V_1 V_2^T$ sont proportionnelles à V_1 et que l'une d'entre elles au moins est non nulle.

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang".

Retour à l'exercice ▲

Montrer qu'une colonne de A au moins est non nulle.

Retour à l'exercice ▲

Aide 3, Question 2, Exercice A.2.16

Montrer que toutes les autres colonnes de A sont proportionnelles à cette colonne non nulle, A_i par exemple. En déduire que $A = A_i L$ où L est un vecteur ligne non nul.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 3, Exercice A.2.16

Les 3 colonnes de A sont proportionnelles.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 3, Exercice A.2.16

$$A = (2A_2 \; A_2 \; 3A_2) = A_2(2 \; 1 \; 3).$$

Retour à l’exercice ▲

Aide 1, Question 1, Exercice A.2.17

On choisit $\vec{x} \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$ et on montre que $\vec{x} = \vec{0}$.
Ecrire des implications très claires.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1, Exercice A.2.17

$$\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u \Leftrightarrow \begin{cases} u(\vec{x}) = \vec{0} \\ \exists \vec{y}, \vec{x} = u(\vec{y}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \vec{y}, \vec{x} = u(\vec{y}) \\ u(u(\vec{y})) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \vec{y}, \vec{x} = u(\vec{y}) \\ u(\vec{y}) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2, Exercice A.2.17

Ker u et Im u sont en somme directe. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

On pose $H = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$, comparer les dimensions de H et de E. Conclure.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1a, Exercice A.2.18

Choisir $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$ et montrer que $v \circ u(\vec{x}) = \vec{0}_G$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1a, Exercice A.2.18

Ne pas oublier que si v est linéaire, $v(\vec{0}_F) = \vec{0}_G$

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1b, Exercice A.2.18

Il faut maintenant montrer l'inclusion $\operatorname{Ker}(v \circ u) \subset \operatorname{Ker} u$.

Retour à l'exercice ▲

Aide 2, Question 1b, Exercice A.2.18

$(v \circ u)(\vec{x}) = \vec{0}_G \Rightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F$. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Voir le paragraphe "Rang et dimension du noyau".

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 1c, Exercice A.2.18

Appelons u l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont B est la matrice dans la base canonique et appelons v l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. Si B est inversible, u est bijective et on peut appliquer la question précédente.

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2a, Exercice A.2.18

$\vec{y} \in \operatorname{Im}(u \circ v) \Rightarrow \vec{y} \in \operatorname{Im} u$. Pourquoi ?

Retour à l'exercice ▲

Aide 1, Question 2b, Exercice A.2.18

Il faut montrer maintenant que

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} (u \circ w).$$

Retour à l'exercice ▲

S'inspirer de ce qui a été fait dans la question précédente.

Retour à l'exercice ▲