Exercices du chapitre 2 avec corrigé succinct

Exercice II.1 Ch2-Exercice1

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? :

1. L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $u(x) = \cos x$.

2. L'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $u(x) = \alpha x + \beta$, (α, β donnés dans $\mathbb{R}$) ; discuter suivant les valeurs de α et β.

3. L'application $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donnée par

$$u(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, \ (a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ donnés dans } \mathbb{R}).$$

4. La projection d'un vecteur de l'espace sur un plan Π parallèlement à une droite Δ donnée.

5. Soit $\mathscr{P}_k$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus k, dont on note les éléments P.
   On définit $u : \mathscr{P}_k \to \mathscr{P}_{k-1}$ par $u(P) = P'$, (P' est la dérivée de P).

6. L'application $u : \mathscr{P}_k \to \mathscr{P}_{2k}$ définie par $u(P) = P^2$.

7. Soit $\mathscr{C}(0,1)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé $[0,1]$, dont on note ϕ les éléments. On définit alors $u : \mathscr{C}(0,1) \to \mathbb{R}$ par $u(\phi) = \int_0^1 \phi(t)dt$.

Solution : 1) non, 2) non si $\beta \neq 0$, oui si$\beta = 0$ 3) 4) 5) oui, 6) non, 7) oui.

Exercice II.2 Ch2-Exercice2

Montrer que Ker u est un sous-espace vectoriel de E

Exercice II.3 Ch2-Exercice3

On reprend les applications de l'exercice II.1, lorsque ces applications sont linéaires déterminer leur noyau et leur image

Solution : 2) - si $\alpha = \beta = 0$, Ker $u = \mathbb{R}$, Im $u = \{\vec{0}\}$,
- si $\alpha \neq 0, \beta = 0$ Ker $u = \{\vec{0}\}$, Im $u = \mathbb{R}$.

3) Ker $u = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0\}$, Im $u = \mathbb{R}$.

4) Ker $u = \Delta$, Im $u = \Pi$.

5) Ker $u = \mathscr{P}_0$ (polynômes constants), Im $u = \mathscr{P}_{n-1}$.

7) Ker $u = \{\phi \in \mathscr{C}(0,1) | \int_0^1 \phi(t)dt = 0\}$, Im $u = \mathbb{R}$.

Exercice II.4 Ch2-Exercice4

Démontrer le théorème suivant : Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, alors on a les propriétés suivantes :

– l'image par u de toute famille liée de E est une famille liée de F,

– l'image par u de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de Im u.

Solution :

– On suppose que $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ est une famille liée de E, donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que : $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{O}$ on a donc $u(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p) = \vec{O}$ et donc $\lambda_1 u(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_p u(\vec{x}_p) = \vec{O}$, ce qui montre que $\{u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p)\}$ est une famille liée.

– On commence par remarquer que les vecteurs $u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p)$ appartiennent à Im u.
De plus soit $\vec{y} \in \text{Im } u$ alors il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Si $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ est une famille génératrice de E , $\vec{x}$ peut s'écrire $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{x}_i$, on a donc $\begin{cases} \vec{y} = u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(\vec{x}_i) \\ u(\vec{x}_i) \in \text{Im } u \end{cases}$ donc $\{u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p)\}$ est une famille génératrice de Im u

---

Exercice II.5 Ch2-Exercice5

Soit un espace vectoriel E, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, on appelle **projection** ou encore **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par :

$$u(\vec{x}) = \vec{x}_1 \text{ si } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ où } \vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2.$$

Montrer que la projection ainsi définie est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Solution : On vérifie facilement que $u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}), u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$
Im $u = F_1$, Ker $u = F_2$

Exercice II.6 Ch2-Exercice6

Montrer que si u est une projection alors u=$u \circ u$. On démontrera la réciproque de cette propriété en TD.

Solution : On a bien sûr $u(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$, donc $u \circ u(\vec{x}) = u(\vec{x}) \forall \vec{x} \in E$ on a donc $u \circ u = u$. Vous pouvez illustrer ce résultat en pensant aux projections géométriques classiques sur un plan ou une droite.

Exercice II.7 Ch2-Exercice7

Vérifier que $w = u \circ v$ est bien un élément de $\mathscr{L}(E;G)$.

Solution : $\left. \begin{cases} (u \circ v)(\vec{x} + \vec{y}) = (u \circ v)(\vec{x}) + (u \circ v)(\vec{y}) \\ (u \circ v)(\lambda \vec{x}) = \lambda (u \circ v)(\vec{x}) \end{cases} \right\}$ ces 2 propriétés se vérifient très facilement.

Exercice II.8 Ch2-Exercice8

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 , $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ une base de E, soit F un espace vectoriel de dimension 2 , $\mathscr{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ une base de F et $u \in \mathscr{L}(E;F)$. On sait que
$u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2, u(\vec{e}_2) = \vec{f}_1 - \vec{f}_2, u(\vec{e}_3) = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_2$.
Calculer l'expression de $u(\vec{x})$ pour $\vec{x}$ quelconque de E

Solution : $u(\vec{x}) = u(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) = x_1 u(\vec{e}_1) + x_2 u(\vec{e}_2) + x_3 u(\vec{e}_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\vec{f}_1 + (x_1 - x_2 - 2x_3)\vec{f}_2$.
On voit donc que la donnée de $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3)$ définit $u(\vec{x})$ pour tout $\vec{x}$.
(A condition bien sûr de connaitre les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathscr{E}$)

Exercice II.9 Ch2-Exercice9

1. On suppose que l'application $u \in \mathscr{L}(E;F)$ est injective.
   (a) Montrer que si la famille
   $\{u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_p)\}$ est liée alors la famille $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p)\}$ est liée.
   (b) Montrer que l'image d'une base de E est une base de Im u.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, E de type fini, montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) u est injective,
   (ii) il existe une base $\mathscr{B} = \{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ de E telle que $\{u(\vec{e}_1),\dots,u(\vec{e}_n)\}$ soit libre.

Solution :

1. (a) On sait que si u est injective, on a $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\}$ libre $\Longrightarrow \{u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_p)\}$ libre,
   donc en utilisant la contraposée :
   $\{u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_p)\}$ liée $\Longrightarrow \{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\}$ liée
   (b) Une base de E est une famille libre, donc son image par u est une famille libre puisque u est injective.
   Une base de E est une famille génératrice de E, donc son image par u est une famille génératrice de Im u.
   L'image d'une base de E est donc une base de Im u.
2. (ii)$\Rightarrow$(i) - Soit $\vec{x}$ un vecteur tel que $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$, on peut alors décomposer ce vecteur sur la base $\mathscr{E}$:
   $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ et $\vec{0}_F = u(\vec{x}) = u(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j u(\vec{e}_j)$ et comme la famille $u(\mathscr{E})$ est libre par hypothèse cela implique que
   $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, soit $\vec{x} = \vec{0}_E$ et donc Ker $u = \{\vec{0}_E\}$.
   (i)$\Rightarrow$(ii) - Puisque E est de type fini, il existe une base $\mathscr{B}$ de E, cette base est une famille libre, donc d'après la proposition 2.1.6 son image par u est une famille libre.

Exercice II.10 Ch2-Exercice10

Soit $u \in \mathscr{L}(E;F)$, on définit les propositions suivantes :
– (i) u est bijective,
– (ii) l'image par u d'une base de E est une base de F.
Montrer que $(i) \Longleftrightarrow (ii)$.

Solution : $\left.\begin{array}{l}\text{(i)} \Longrightarrow u \text{ est injective } \Longrightarrow \text{ l'image d'une famille libre est libre} \\ \text{(i)} \Longrightarrow u \text{ est surjective } \Longrightarrow \text{ l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de F}\end{array}\right\}$
$\Longrightarrow$ l'image d'une base de E est une base de F
Réciproquement : Soit $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}$ une base de E. On suppose que l'image par u de cette base de E est une base de F
– Montrons que Ker $u = \vec{0}_E$:
$$\left.\begin{array}{l}\vec{x} \in \text{Ker } u \Longleftrightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F \\ \vec{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i\end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i u(\vec{x}_i) = \vec{0}_F \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}_E.$$
  (On a utilisé l'hypothèse que $\{u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_n)\}$ est une base donc libre).
  On vient donc de montrer que Ker $u = \vec{0}_E$ donc u est injective.
– Montrons que Im $u = F$
  $\{u(\vec{x}_1),\dots,u(\vec{x}_n)\}$ est une base de F donc $\forall \vec{y} \in F, \vec{y} = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i u(\vec{x}_i) = u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i\right)$ donc $\vec{y} \in$ Im u.
  On vient de montrer que Im $u = F$, donc que u est surjective.
Ce qui termine de démontrer l'équivalence.

Exercice II.11 Ch2-Exercice11

Soient E et F deux espaces de même dimension n, soient $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ et $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ des bases de E et F, on définit une application linéaire u de la manière suivante

$$u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i.$$

Montrer qu'alors u est bijective de E sur F.

Solution : On démontre facilement que : $\begin{cases} u(\vec{x}) = \vec{0}_F \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E \text{ donc Ker } u = \{\vec{0}_E\} \\ \forall \vec{y} \in F, \exists \vec{x}, \vec{y} = u(\vec{x}) \text{ donc Im } u = F \end{cases}$ donc u est bijective.

Exercice II.12 Ch2-Exercice12

Soit E un espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, alors pour tout $\vec{x} \in E$ on peut écrire

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j$$

et on peut associer à $\vec{x} \in E$ le vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de K^n correspondant aux composantes de $\vec{x}$ sur $\mathscr{E}$.
Montrer que l'application $\vec{x} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : E \to K^n$ ainsi définie est un isomorphisme de E sur K^n.

Solution : Comme tout $\vec{x} \in E$ admet une décomposition unique sur la base $\mathscr{E}$ l'application $\vec{x} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est bien définie. On montre facilement qu'elle est linéaire et injective et surjective.

Exercice II.13 Ch2-Exercice13

Montrer que la matrice de l'application $i_E : E \mapsto E$ est la matrice identité I lorsque l'on munit l'espace E de la base $\mathscr{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Solution : $i_E(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$ donc $A = I$.

Exercice II.14 Ch2-Exercice14

On suppose E=$F = \mathscr{P}_2$, on munit $\mathscr{P}_2$ de la base canonique $\{1, X, X^2\}$, on définit u telle que $u(p) = p'$. Déterminer alors la matrice de u.

Solution : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice II.15 Ch2-Exercice15

Soit la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est A lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques. Que vaut $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n)$? En déduire $u(\vec{x})$ pour $\vec{x} = (1, -1, 2)$

Solution : $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ donc $u(\vec{x}) = u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) + 2u(\vec{e}_3)$

Or d'après la définition de A on a : $\begin{cases} u(\vec{e}_1) & = & 3\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_2) & = & 4\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_3) & = & 5\vec{f}_1 + 6\vec{f}_2 \end{cases}$

On déduit donc de tout ce qui précède : $u(\vec{x}) = 9\vec{f}_1 + 11\vec{f}_2$

Exercice II.16 Ch2-Exercice16
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par
$u(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$,
déterminer la matrice A associée à u lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ des bases canoniques.

Solution : Pour obtenir A il suffit de déterminer $u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4)$.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} u(\vec{e}_1) & = & (1,1,1) & = & \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_2) & = & (-1,2,1) & = & -\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 + \vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_3) & = & (1,0,3) & = & \vec{f}_1 + 3\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_4) & = & (1,-1,-3) & = & \vec{f}_1 - \vec{f}_2 - 3\vec{f}_3 \end{array}\right. .\text{D'où } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bien sûr pour obtenir $u(\vec{e}_1)$, on écrit $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$ donc $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$.
Vous pourrez revenir à cet exrcice après avoir étudié le calcul explicite de l'image d'un vecteur.

Exercice II.17 Ch2-Exercice17

1. Démontrer que $\mathcal{M}_{mn}$ est un espace vectoriel, en particulier quel est l'élément neutre pour l'addition ? Quel est l'opposé de A ?
2. Déterminer une base de $\mathcal{M}_{mn}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$?

Solution :

1. On démontre facilement que la somme est une loi de composition interne, associative, la matrice E dont tous les termes sont nuls (on la note $E = 0$) est l'élément neutre, la matrice B dont les termes sont les opposés de ceux de A (B=-A) est le symétrique de A. On a de plus
$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, 1A = A$
2. Si l'on note E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme situé en ligne i et colonne j qui vaut 1, alors $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$. La famille $\{E_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ est donc génératrice, on montre facilement qu'elle est libre : c'est donc une base , la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$ est donc mn.

Exercice II.18 Ch2-Exercice18
Calculer le produit AB (et BA lorsque cela est possible) dans les cas suivants :

– $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

– $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solution :

– $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

– $AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Une disposition pratique pour ce dernier produit est la suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \times & \times \\ \otimes & \times \\ \times & \times \end{pmatrix} \end{array}$$

Le terme $\otimes$ est obtenu par produit terme à terme de la ligne de A et de la colonne de B situées dans son prolongement. C'est-à-dire $\otimes = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1$. Bien sûr cette disposition qui est pratique quand on débute se revèle rapidement encombrante !
On ne peut pas effectuer le produit BA.

Exercice II.19 Ch2-Exercice19

On définit les matrices $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ $D'=\begin{pmatrix}5&0\\0&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}$

1. Calculer BD', DB . Que se passe-t-il quand on multiplie une matrice à droite par une matrice diagonale ? quand on multiplie une matrice à gauche par une matrice diagonale ? Enoncer des résultats généraux.
2. Par quelle matrice L doit-on multiplier B à gauche pour que $LB=\underline{B}_2$? Par quelle matrice C doit-on multiplier B à droite pour que $BC=B_1$?

Solution :

1. $BD'=\begin{pmatrix}5B_1 & 6B_2\end{pmatrix}$: le produit à droite d'une matrice B par une matrice diagonale D' revient à multiplier chacune des colonnes B_i par le scalaire d'_{ii}.

   $DB=\begin{pmatrix}2\underline{B}_1\\3\underline{B}_2\\4\underline{B}_3\end{pmatrix}$: le produit à gauche d'une matrice B par une matrice diagonale D, revient à multiplier chacune des lignes $\underline{B}_i$ par le scalaire d_{ii}.
2. $L=\begin{pmatrix}0&1&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, ce résultat se généralise bien sûr à une matrice B quelconque.

Exercice II.20 Ch2-Exercice20

Reprendre l'exercice II.15. Que vaut X ? Calculer AX et comparer avec ce qui a été trouvé alors.

Solution : On a $X=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, AX=Y\begin{pmatrix}9\\11\end{pmatrix}$ donc $u(\vec{x})=(9,11)=9\vec{f}_1+11\vec{f}_2$. On retrouve bien sûr le même résultat.

Exercice II.21 Ch2-Exercice21

Démontrer que le produit de deux matrices carrées inversibles de même dimension est inversible et on a $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Solution : On pose $M=AB, N=B^{-1}A^{-1}$, on montre en utilisant l'associativité que $MN=NM=I$, donc $N=(M)^{-1}: B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$

Exercice II.22 Ch2-Exercice22

Soit la matrice $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}$. Expliciter $\underline{B}_1$, $\underline{B}_2$, $\underline{B}_3$, B_1, B_2, $\underline{B^T}_1$, $\underline{B^T}_2$, $(B^T)_1$, $(B^T)_2$, $(B^T)_3$, $(\underline{B}_1)^T$, $(\underline{B}_2)^T$, $(\underline{B}_3)^T$,$(B_1)^T$, $(B_2)^T$. Vérifier sur cet exemple que : $(B_i)^T$=$\underline{B^T}_i$. Bien sûr ces résultats se généralisent à une matrice B quelconque.

Solution :

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\3&-1\end{pmatrix}, B^T=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&-1\end{pmatrix},$$

$$\underline{B}_1=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}, \underline{B}_2=\begin{pmatrix}-1&1\end{pmatrix}, \underline{B}_3=\begin{pmatrix}3&-1\end{pmatrix}, \underline{B^T}_1=\begin{pmatrix}1&-1&3\end{pmatrix}, \underline{B^T}_2=\begin{pmatrix}2&1&-1\end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B^T)_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (B^T)_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (B^T)_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{B}_1)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (\underline{B}_2)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\underline{B}_3)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B_1)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, (B_2)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice II.23 Ch2-Exercice23

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. On définit les vecteurs $\vec{e'}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e'}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
– Montrer que $\mathcal{E}' = \{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ forme une base de E.
– Que vaut P matrice de passage de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$?

Solution :

1. On montre que $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$ est une famille libre, en effet $\lambda_1 \vec{e'}_1 + \lambda_2 \vec{e'}_2 = \vec{O} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
   (Il suffit en effet d'exprimer $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ en fonction de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$).
   Or une famille libre à 2 éléments est une base.
2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice II.24 Ch2-Exercice24

Reprendre l'exercice II.23
– Exprimer $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
– Si x_1 et x_2 sont les composantes du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$, en déduire x'_1 et x'_2 ses composantes dans la base $\mathcal{E}'$.
– Vérifier que $X = PX'$.
– Que vaut P^{-1} matrice de passage de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$? Effectuer le produit PP^{-1}.

Solution :

1. $\left\{\begin{array}{lcl} \vec{e'}_1 & = & \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e'}_2 & = & 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \vec{e}_1 & = & \frac{1}{3}\vec{e'}_1 + \frac{1}{3}\vec{e'}_2 \\ \vec{e}_2 & = & \frac{2}{3}\vec{e'}_1 - \frac{1}{3}\vec{e'}_2 \end{array}\right.$
2. $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = x_1\left(\frac{1}{3}\vec{e'}_1 + \frac{1}{3}\vec{e'}_2\right) + x_2\left(\frac{2}{3}\vec{e'}_1 - \frac{1}{3}\vec{e'}_2\right) = \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)\vec{e'}_1 + \left(\frac{1}{3}\vec{x}_1 - \frac{1}{3}x_2\right)\vec{e'}_2$ donc
   $x'_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$, $x'_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2$
3. $PX' = \begin{pmatrix} x'_1 + 2x'_2 \\ x'_1 - x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X$
4. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on a obtenu P^{-1} à partir de 1. On vérifie bien sûr que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$

Exercice II.25 Ch2-Exercice25

On reprend les données de l'exercice II.23. On définit $u \in \mathscr{L}(E;E)$ par
$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, u(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$

– Quelle est la matrice A de u dans la base $\mathscr{E}$?
– Exprimer $u(\vec{e'}_1)$, $u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
– En déduire $u(\vec{e'}_1), u(\vec{e'}_2)$ en fonction de $\vec{e'}_1$ et $\vec{e'}_2$.
– En déduire A'.
– Calculer $P^{-1}AP$.

Solution :

– $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
– $u(\vec{e'}_1) = u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $u(\vec{e'}_2) = 2u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) = 7\vec{e}_2$
– $u(\vec{e'}_1) = \vec{e'}_1 + \vec{e'}_2 + \frac{4}{3}\vec{e'}_1 - \frac{2}{3}\vec{e'}_2 = \frac{7}{3}\vec{e'}_1 + \frac{1}{3}\vec{e'}_2$, $u(\vec{e'}_2) = \frac{14}{3}\vec{e'}_1 - \frac{7}{3}\vec{e'}_2$
– $A' = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

Exercice II.26 Ch2-Exercice26

Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}$, montrer que Im A est un sous espace vectoriel. Montrer plus précisément que Im A = vect $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$.

Solution : On démontre immédiatemment que Im A est un sous espace vectoriel. On a de plus :
$Y \in \text{Im } A \Longleftrightarrow Y = AX \Longleftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i$ avec $x_i \in K \Longleftrightarrow Y \in$ vect $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$.

Exercice II.27 Ch2-Exercice27

Déterminer le rang des matrices A suivantes :

– Si $E = E_1 \oplus E_2$, A est la matrice de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.
– A est la matrice de la rotation dans le plan.
– $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

– rang A = dim E_1
– rang $A = 2$
– rang $A = 2$ car $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une famille liée et que $\{A_1, A_2\}$ est une famille libre.

Exercice II.28 Ch2-Exercice28

On définit les 5 propositions :
a) f est injective.
b) f est surjective.
c) f est bijective.
d) f n'est pas injective.
e) f n'est pas surjective.

Dans chacun des cas suivants, énoncer parmi les 5 propositions lesquelles sont exactes (sans hypothèse supplémentaire)

1. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$

2. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
3. f est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$
4. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$
5. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$
6. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$
7. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$

Solution :

1. e)
2. rien sans hypothèses supplémentaires
3. d)
4. a) e)
5. a), b), c)
6. b), d)
7. a), b), c)

Exercice II.29 Ch2-Exercice29

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{np}$, Ker A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p1}$.

Solution : Ker A n'est pas vide puisque $0 \in \text{Ker } A$.
On vérifie de plus la stabilité
Si $X, X' \in \text{Ker } A, a \in K$ alors $X + X' \in \text{Ker } A, aX \in \text{Ker } A$.

Exercice II.30 Ch2-Exercice30

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : On constate que la recherche du noyau de A revient à chercher les coefficients x_1, x_2, x_3 qui vérifient $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0$, ce qui revient à étudier si les colonnes A_1, A_2, A_3 forment un famille libre, ce qui permet de savoir si le rang de A vaut 3.
Dans le cas de A on trouve des coefficients non nuls possibles, donc Ker $A \neq \{0\}$,ou encore rang $A < 3$, ce qui permet de conclure que A n'est pas inversible.
Dans le cas de B, la seule solution est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc B est inversible.
