

Exercices du chapitre 2 avec corrigé succinct

Exercice II.1 Ch2-Exercice 1 : applications linéaires ou non

Les applications suivantes sont-elles linéaires?

1. L'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $u(x) = \cos x$.
2. L'application $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $u(x) = \alpha x + \beta$, où α et β sont donnés dans $\mathbb{R}$; discuter suivant les valeurs de α et β .
3. L'application $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$u(\vec{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

où $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont donnés dans $\mathbb{R}$.

4. La projection d'un vecteur de l'espace sur un plan Π parallèlement à une droite Δ donnée.
5. Soit $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré au plus k , dont on note les éléments P . On définit $u : \mathbb{R}_k[X] \rightarrow \mathbb{R}_{k-1}[X]$ par $u(P) = P'$, (P' est la dérivée de P).
6. L'application $u : \mathbb{K}_k[X] \rightarrow \mathbb{K}_{2k}[X]$ définie par $u(P) = P^2$.
7. Soit $\mathcal{C}(0, 1)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé $[0, 1]$, dont on note ϕ les éléments. On définit alors $u : \mathcal{C}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ par $u(\phi) = \int_0^1 \phi(t) dt$.

Solution : 1) non, 2) non si $\beta \neq 0$, oui si $\beta = 0$, 3) 4) 5) oui, 6) non, 7) oui.

Exercice II.2 Ch2-Exercice 2 : noyau = sous espace vectoriel

Montrer que $\text{Ker } u$ est un sous-espace vectoriel de E .

Exercice II.3 Ch2-Exercice 3 : noyau et image d'applications linéaires

On reprend les applications de l'Exercice II.1. Lorsque ces applications sont linéaires déterminer leur noyau et leur image.

Solution : 2) - si $\alpha = \beta = 0$, $\text{Ker } u = \mathbb{R}$, $\text{Im } u = \{\vec{0}\}$,
- si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, $\text{Ker } u = \{\vec{0}\}$, $\text{Im } u = \mathbb{R}$.

3) $\text{Ker } u = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0\}$, $\text{Im } u = \mathbb{R}$.

4) $\text{Ker } u = \Delta$, $\text{Im } u = \Pi$.

5) $\text{Ker } u = \mathbb{R}_0[X]$ (polynômes constants), $\text{Im } u = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

7) $\text{Ker } u = \left\{ \phi \in \mathcal{C}(0, 1) \mid \int_0^1 \phi(t) dt = 0 \right\}$, $\text{Im } u = \mathbb{R}$.

Exercice II.4 Ch2-Exercice 4 : images de familles liée et génératrice

Démontrer le théorème suivant : Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$, alors on a les propriétés suivantes :

- l'image par u de toute famille liée de E est une famille liée de F ,
- l'image par u de toute famille génératrice de E est une famille génératrice de $\text{Im } u$.

Solution :

- On suppose que $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est une famille liée de E , donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que : $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p = \vec{0}$. On a donc $u(\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_p \vec{x}_p) = u(\vec{0}) = \vec{0}$ et donc $\lambda_1 u(\vec{x}_1) + \dots + \lambda_p u(\vec{x}_p) = \vec{0}$, ce qui montre que $(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p))$ est une famille liée.
- On commence par remarquer que les vecteurs $u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p)$ appartiennent à $\text{Im } u$.
De plus soit $\vec{y} \in \text{Im } u$ alors il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Si $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est une famille génératrice de E , $\vec{x}$ peut s'écrire $\vec{x} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \vec{x}_i$, on a donc
$$\begin{cases} \vec{y} = u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^p \alpha_i u(\vec{x}_i), \\ u(\vec{x}_i) \in \text{Im } u, \end{cases} \quad \text{donc } (u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p)) \text{ est une famille}$$
 génératrice de $\text{Im } u$.

Exercice II.5 Ch2-Exercice 5 : projection sur seV : linéarité, noyau, image

Soit un espace vectoriel E , F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$, on appelle **projection** ou encore **projecteur** sur F_1 parallèlement à F_2 l'application u de E dans E définie par :

$$u(\vec{x}) = \vec{x}_1 \quad \text{si } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \text{ où } \vec{x}_1 \in F_1, \vec{x}_2 \in F_2.$$

Montrer que la projection ainsi définie est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Solution : On vérifie facilement que $u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y})$, $u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x})$

$\text{Im } u = F_1$, $\text{Ker } u = F_2$

Exercice II.6 Ch2-Exercice 6 : projection sur seV : idempotence

Montrer que si u est une projection, alors $u = u \circ u$. On démontrera la réciproque de cette propriété en TD.

Solution : On a bien sûr $u(\vec{x}_1) = \vec{x}_1$, donc $u \circ u(\vec{x}) = u(\vec{x}) \forall \vec{x} \in E$ on a donc $u \circ u = u$. Vous pouvez illustrer ce résultat en pensant aux projections géométriques classiques sur un plan ou une droite.

Exercice II.7 Ch2-Exercice 7 : linéarité de la composée d'applications linéaires

Vérifier que $w = u \circ v$ est bien un élément de $\mathcal{L}(E; G)$.

Solution :
$$\left\{ \begin{array}{l} (u \circ v)(\vec{x} + \vec{y}) = (u \circ v)(\vec{x}) + (u \circ v)(\vec{y}) \\ (u \circ v)(\lambda \vec{x}) = \lambda (u \circ v)(\vec{x}) \end{array} \right\} \text{ ces 2 propriétés se vérifient très facilement.}$$

Exercice II.8 Ch2-Exercice 8 : image de vecteur par appl. lin. définie sur une base

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E .

Soient F un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ une base de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$, telle que $u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$, $u(\vec{e}_2) = \vec{f}_1 - \vec{f}_2$ et $u(\vec{e}_3) = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_2$.

Calculer l'expression de $u(\vec{x})$ pour $\vec{x}$ quelconque de E .

Solution : Il vient

$$u(\vec{x}) = u(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) = x_1 u(\vec{e}_1) + x_2 u(\vec{e}_2) + x_3 u(\vec{e}_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \vec{f}_1 + (x_1 - x_2 - 2x_3) \vec{f}_2.$$

On voit donc que la donnée de $u(\vec{e}_1)$, $u(\vec{e}_2)$ et $u(\vec{e}_3)$ définit $u(\vec{x})$ pour tout $\vec{x}$.

(À condition bien sûr de connaître les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$.)

Exercice II.9 Ch2-Exercice 9 : image de famille libre et de base, injectivité

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$. On suppose que u est injective.
 - (a) Montrer que si la famille $(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p))$ est liée, alors la famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ est liée.
 - (b) Montrer que l'image d'une base de E est une base de $\text{Im } u$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$, E de type fini. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
 - (i) u est injective,
 - (ii) il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E telle que $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ soit libre.

Solution :

1. (a) On sait que si u est injective, on a $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ libre $\implies (u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p))$ libre, donc en utilisant la contraposée :
 $(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_p))$ liée $\implies (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ liée.
- (b) Une base de E est une famille libre, donc son image par u est une famille libre puisque u est injective.
 Une base de E est une famille génératrice de E , donc son image par u est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
 L'image d'une base de E est donc une base de $\text{Im } u$.
2. (ii) $\implies$ (i) Soit $\vec{x}$ un vecteur tel que $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$, on peut alors décomposer ce vecteur sur la base $\mathcal{E}$:
 $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ et $\vec{0}_F = u(\vec{x}) = u(\sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j u(\vec{e}_j)$ et comme la famille $u(\mathcal{E})$ est libre par hypothèse cela implique que $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, soit $\vec{x} = \vec{0}_E$ et donc $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$.
- (i) $\implies$ (ii) Puisque E est de type fini, il existe une base $\mathcal{B}$ de E , cette base est une famille libre, donc d'après la Proposition 2.1.6 son image par u est une famille libre.

Exercice II.10 Ch2-Exercice 10 : bijectivité et image d'une base

Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$, où E et F ne sont pas réduits à $\{\vec{0}\}$. On définit les propositions suivantes :

- (i) u est bijective,
- (ii) l'image par u d'une base de E est une base de F .

Montrer que (i) $\iff$ (ii).

Solution : On a d'une part : (i) $\implies u$ est injective $\implies$ l'image d'une famille libre est libre.

On a d'autre part : (i) $\implies u$ est surjective $\implies$ l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de F .

Donc l'image d'une base de E est une base de F .

Réciproquement : soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une base de E . On suppose que l'image par u de cette base de E est une base de F

- Montrons que $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$: soit $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i$ dans $\text{Ker } u$.

On a $\vec{x} \in \text{Ker } u \iff u(\vec{x}) = \vec{0}_F$, donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i u(\vec{x}_i) = \vec{0}_F$, donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ et finalement $\vec{x} = \vec{0}_E$.

(On a utilisé l'hypothèse que $(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n))$ est une base donc libre).

On vient donc de montrer que $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$, donc u est injective.

- Montrons que $\text{Im } u = F$: la famille $(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n))$ est une base de F , donc engendre F .

Il vient par linéarité de u que pour tout $\vec{y} \in F$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(\vec{x}_i) = u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i\right)$, donc $\vec{y} \in \text{Im } u$.

On vient de montrer que $\text{Im } u = F$, donc que u est surjective.

Ceci termine de démontrer l'équivalence.

Exercice II.11 Ch2-Exercice 11 : isomorphisme canonique entre E et F

Soient E et F deux espaces de même dimension n , soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n)$ des bases de E et F . On définit une application linéaire u de la manière suivante

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i.$$

Montrer qu'alors u est bijective de E sur F .

Solution : On démontre facilement que

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) = \vec{0}_F &\implies \vec{x} = \vec{0}_E, & \text{donc} & \quad \text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}, \\ \forall \vec{y} \in F, \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = u(\vec{x}), & & \text{donc} & \quad \text{Im } u = F, \end{aligned}$$

donc u est bijective.

Exercice II.12 Ch2-Exercice 12 : isomorphisme canonique entre E et $\mathbb{K}^n$

Soit E un espace vectoriel de dimension n , muni d'une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Alors pour tout $\vec{x} \in E$, il existe un unique $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{x}$ s'écrit

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{e}_j.$$

On peut associer à $\vec{x} \in E$ le vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de $\mathbb{K}^n$ des composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$.

Montrer que l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $\vec{x} \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$.

Solution : Comme tout $\vec{x} \in E$ admet une décomposition unique sur la base $\mathcal{E}$, l'application ϕ est bien définie. On montre facilement qu'elle est linéaire et injective et surjective.

Exercice II.13 Ch2-Exercice 13 : matrice de l'application identité

Soit l'application identité $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ définie par $\text{Id}_E(\vec{x}) = \vec{x}$ pour tout $\vec{x}$ de E . Montrer que la matrice de Id_E est la matrice identité I_n , lorsque l'on munit l'espace E de la base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$.

Solution : Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Id}_E(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$, donc $A = I$.

Exercice II.14 Ch2-Exercice 14 : matrice de la dérivation sur l'espace des polynômes

On suppose $E = F = \mathbb{K}_3[X]$ et on munit $\mathbb{K}_3[X]$ de la base canonique (p_0, p_1, p_2, p_3) . On définit u telle que $u(p) = p'$. Déterminer alors la matrice de u .

Solution : La matrice de u s'écrit dans la base canonique des polynômes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice II.15 Ch2-Exercice 15 : application définie par une matrice

Soit la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et u est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est

A lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques.

Que valent $u(\vec{e}_1)$, $u(\vec{e}_2)$, $\dots$, $u(\vec{e}_n)$? En déduire $u(\vec{x})$ pour $\vec{x} = (1, -1, 2)$.

Solution : $\vec{x} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, donc $u(\vec{x}) = u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) + 2u(\vec{e}_3)$.

$$\text{Or d'après la définition de } A \text{ on a : } \begin{cases} u(\vec{e}_1) = 3\vec{f}_1 + \vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_2) = 4\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 \\ u(\vec{e}_3) = 5\vec{f}_1 + 6\vec{f}_2 \end{cases}.$$

On déduit donc de tout ce qui précède $u(\vec{x}) = 9\vec{f}_1 + 11\vec{f}_2$.

Exercice II.16 Ch2-Exercice 16 : matrice d'une application linéaire

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u(\vec{x}) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4).$$

Déterminer la matrice A associée à u lorsque l'on munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ des bases canoniques.

Solution : Pour obtenir A il suffit de déterminer $u(\vec{e}_1)$, $u(\vec{e}_2)$, $u(\vec{e}_3)$, $u(\vec{e}_4)$. Il vient

$$\begin{cases} u(\vec{e}_1) = (1, 1, 1) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_2) = (-1, 2, 1) = -\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 + \vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_3) = (1, 0, 3) = \vec{f}_1 + 3\vec{f}_3 \\ u(\vec{e}_4) = (1, -1, -3) = \vec{f}_1 - \vec{f}_2 - 3\vec{f}_3 \end{cases}, \text{ d'où } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bien sûr pour obtenir $u(\vec{e}_1)$, on écrit $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, donc $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Vous pourrez revenir à cet exercice après avoir étudié le calcul explicite de l'image d'un vecteur.

Exercice II.17 Ch2-Exercice 17 : espace vectoriel des matrices, base de $\mathcal{M}_{mn}$

1. Démontrer que $\mathcal{M}_{mn}$ est un espace vectoriel. En particulier quel est l'élément neutre pour l'addition? Quel est l'opposé de A ?
2. Déterminer une base de $\mathcal{M}_{mn}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$?

Solution :

1. On démontre facilement que la somme est une loi de composition interne, associative, la matrice E dont tous les termes sont nuls (on la note $E = 0$) est l'élément neutre, la matrice B dont les termes sont les opposés de ceux de A ($B = -A$) est le symétrique de A . On a de plus
 $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $1A = A$.
2. Si l'on note E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf le terme situé en ligne i et colonne j qui vaut 1, alors

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}, \quad \text{où } \begin{cases} \forall i = 1, \dots, m, \\ \forall j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

La famille des matrices $(E_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est donc génératrice de $\mathcal{M}_{mn}$, on montre facilement qu'elle est libre : c'est donc une base, la dimension de $\mathcal{M}_{mn}$ est donc mn .

Exercice II.18 Ch2-Exercice 18 : produit (non commutatif) de matrices

Calculer le produit AB (et BA lorsque cela est possible) dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} - & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ - & A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution :

$$- AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$- AB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Une disposition pratique pour ce dernier produit est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times \\ \otimes & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}$$

Le terme $\otimes$ est obtenu par produit terme à terme de la ligne de A et de la colonne de B situées dans son prolongement. C'est-à-dire $\otimes = 0 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1$. Bien sûr cette disposition qui est pratique quand on débute se révèle rapidement encombrante!

On ne peut pas effectuer le produit BA .

Exercice II.19 Ch2-Exercice 19 : produit à gauche, à droite par une matrice diagonale

On définit les matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer BD' , DB . Que se passe-t-il quand on multiplie une matrice à droite par une matrice diagonale? Et quand on multiplie une matrice à gauche par une matrice diagonale? Énoncer des résultats généraux.
2. Par quelle matrice L doit-on multiplier B à gauche pour que $LB = \underline{B}_2$? Par quelle matrice C doit-on multiplier B à droite pour que $BC = \underline{B}_1$?

Solution :

1. $BD' = \begin{pmatrix} 5B_1 & 6B_2 \end{pmatrix}$: le produit à droite d'une matrice B par une matrice diagonale D' revient à multiplier chacune des colonnes B_i par le scalaire d'_{ii} .

$DB = \begin{pmatrix} 2\underline{B}_1 \\ 3\underline{B}_2 \\ 4\underline{B}_3 \end{pmatrix}$: le produit à gauche d'une matrice B par une matrice diagonale D revient à multiplier chacune des lignes $\underline{B}_i$ par le scalaire d_{ii} .

2. $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce résultat se généralise bien sûr à une matrice B quelconque.

Exercice II.20 Ch2-Exercice 20 : produit matrice×vecteur

Reprendre l'Exercice II.15. Que vaut X ? Calculer AX et comparer avec ce qui a été trouvé alors.

Solution : On a $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $AX = Y \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$, donc $u(\vec{x}) = (9, 11) = 9\vec{f}_1 + 11\vec{f}_2$. On retrouve bien sûr le même résultat.

Exercice II.21 Ch2-Exercice 21 : inverse du produit de matrices

Démontrer que le produit de deux matrices carrées inversibles de même dimension est inversible et démontrer que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Solution : On pose $M = AB$, $N = B^{-1}A^{-1}$, on montre en utilisant l'associativité que $MN = NM = I$, donc $N = M^{-1}$, c'est-à-dire $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

Exercice II.22 Ch2-Exercice 22 : lignes, colonnes de la transposée de matrice

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Expliciter $\underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3, B_1, B_2, \underline{B}_1^T, \underline{B}_2^T, (B^T)_1, (B^T)_2, (B^T)_3, (\underline{B}_1)^T, (\underline{B}_2)^T, (\underline{B}_3)^T, (B_1)^T, (B_2)^T$.

Vérifier sur cet exemple que : $(B_j)^T = \underline{B}_j^T$ pour $j = 1, 2$ (les transposées des colonnes de B sont les lignes de B^T).

Bien sûr ces résultats se généralisent à une matrice B quelconque.

Solution :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{B}_1 = (1 \ 2), \underline{B}_2 = (-1 \ 1), \underline{B}_3 = (3 \ -1), \underline{B}_1^T = (1 \ -1 \ 3), \underline{B}_2^T = (2 \ 1 \ -1),$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B^T)_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (B^T)_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (B^T)_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\underline{B}_1)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, (\underline{B}_2)^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\underline{B}_3)^T = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(B_1)^T = (1 \ -1 \ 3), (B_2)^T = (2 \ 1 \ -1).$$

Exercice II.23 Ch2-Exercice 23 : changement de base : matrice de passage (dim = 2)

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On définit les vecteurs $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

- Montrer que $\mathcal{E}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ forme une base de E .
- Que vaut P matrice de passage de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$?

Solution :

1. On montre que $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ est une famille libre. En effet, soient λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 \vec{e}'_1 + \lambda_2 \vec{e}'_2 = \vec{0}$. Alors on exprime $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ en fonction de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, on utilise le fait que $\mathcal{E}$ est libre et on obtient que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Or une famille libre de 2 éléments est une base.

2. $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice II.24 Ch2-Exercice 24 : changement de base : composantes d'un vecteur

Reprendre l'Exercice II.23

- Exprimer $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ en fonction de $\vec{e}'_1$ et $\vec{e}'_2$.
- Si x_1 et x_2 sont les composantes du vecteur $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{E}$, en déduire x'_1 et x'_2 ses composantes dans la base $\mathcal{E}'$.
- Vérifier que $X = PX'$.
- Que vaut P^{-1} matrice de passage de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$? Effectuer le produit PP^{-1} .

Solution :

1. On calcule

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{e}_1 &= \frac{1}{3}\vec{e}'_1 + \frac{1}{3}\vec{e}'_2 \\ \vec{e}_2 &= \frac{2}{3}\vec{e}'_1 - \frac{1}{3}\vec{e}'_2 \end{cases}.$$

2. Il vient

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = x_1\left(\frac{1}{3}\vec{e}'_1 + \frac{1}{3}\vec{e}'_2\right) + x_2\left(\frac{2}{3}\vec{e}'_1 - \frac{1}{3}\vec{e}'_2\right) = \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2\right)\vec{e}'_1 + \left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2\right)\vec{e}'_2,$$

donc

$$x'_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2, \quad x'_2 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2.$$

3. $PX' = \begin{pmatrix} x'_1 + 2x'_2 \\ x'_1 - x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X.$

4. $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on a obtenu P^{-1} à partir de 1. On vérifie bien sûr que $PP^{-1} = P^{-1}P = I$.

Exercice II.25 Ch2-Exercice 25 : changement de base : matrices d'une appl. linéaire

On reprend les données de l'Exercice II.23. On définit $u \in \mathcal{L}(E; E)$ par

$$u(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \quad u(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

- Quelle est la matrice A de u dans la base $\mathcal{E}$?
- Exprimer $u(\vec{e}'_1)$, $u(\vec{e}'_2)$ en fonction de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
- En déduire $u(\vec{e}'_1)$, $u(\vec{e}'_2)$ en fonction de $\vec{e}'_1$ et $\vec{e}'_2$.
- En déduire A' .
- Calculer $P^{-1}AP$.

Solution :

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

— $u(\vec{e}'_1) = u(\vec{e}_1) + u(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $u(\vec{e}'_2) = 2u(\vec{e}_1) - u(\vec{e}_2) = 7\vec{e}_2.$

— $u(\vec{e}'_1) = \vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 + \frac{4}{3}\vec{e}'_1 - \frac{2}{3}\vec{e}'_2 = \frac{7}{3}\vec{e}'_1 + \frac{1}{3}\vec{e}'_2$, $u(\vec{e}'_2) = \frac{14}{3}\vec{e}'_1 - \frac{7}{3}\vec{e}'_2.$

— $A' = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} = P^{-1}AP.$

Exercice II.26 Ch2-Exercice 26 : image d'une matrice engendrée par ses colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}$, montrer que $\text{Im } A$ est un sous espace vectoriel. Montrer plus précisément que $\text{Im } A = \text{Vect}\langle A_1, \dots, A_n \rangle$.

Solution : On démontre immédiatement que $\text{Im } A$ est un sous espace vectoriel. On a de plus :

$$Y \in \text{Im } A \iff \exists X \in \mathbb{K}^n, Y = AX \iff \exists (x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{K}^n, Y = \sum_{i=1}^n x_i A_i \iff Y \in \text{Vect}\langle A_1, \dots, A_n \rangle.$$

Exercice II.27 Ch2-Exercice 27 : rangs de matrices

Déterminer le rang des matrices A suivantes :

- Si $E = E_1 \oplus E_2$, A est la matrice de la projection sur E_1 parallèlement à E_2 .
- A est la matrice de la rotation dans le plan.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution :

- $\text{rang } A = \dim E_1$. Voir Exemple B.1.2.
 - $\text{rang } A = 2$. Voir la définition de la matrice de rotation dans le plan d'angle θ au paragraphe Matrices-définitions.
 - $\text{rang } A = 2$ car (A_1, A_2, A_3) est une famille liée et que (A_1, A_2) est une famille libre.
-

Exercice II.28 Ch2-Exercice 28 : injectivité, surjectivité, bijectivité selon les dimensions

On définit les 5 propositions :

- a) f est injective.
- b) f est surjective.
- c) f est bijective.
- d) f n'est pas injective.
- e) f n'est pas surjective.

Dans chacun des cas suivants, énoncer parmi les 5 propositions ci-dessus lesquelles sont exactes (sans hypothèse supplémentaire) :

1. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. f est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. f est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.
5. f est linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
6. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.
7. f est linéaire surjective de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$.

Solution :

1. e)
 2. rien sans hypothèses supplémentaires.
 3. d)
 4. a) e)
 5. a), b), c)
 6. b), d)
 7. a), b), c)
-

Exercice II.29 Ch2-Exercice 29 : noyau d'une matrice = sous espace vectoriel

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{np}$, alors $\text{Ker } A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p1}$.

Solution : $\text{Ker } A$ n'est pas vide puisque $0 \in \text{Ker } A$.

On vérifie de plus la stabilité.

Si $X, X' \in \text{Ker } A$, $a \in \mathbb{K}$, alors $X + X' \in \text{Ker } A$ et $aX \in \text{Ker } A$.

Exercice II.30 Ch2-Exercice 30 : inversibilité de deux matrices 3×3

Les matrices suivantes sont-elles inversibles?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : On constate que la recherche du noyau de A revient à chercher les coefficients x_1, x_2, x_3 qui vérifient $x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0$. Ceci revient à étudier si les colonnes A_1, A_2, A_3 forment une famille libre, ce qui permet de savoir si le rang de A vaut 3.

Dans le cas de A , on trouve des coefficients non nuls possibles, donc $\text{Ker } A \neq \{0\}$, ou encore $\text{rang } A < 3$, ce qui permet de conclure que A n'est pas inversible.

Dans le cas de B , la seule solution est $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc B est inversible.
