MT23-P2013 Test 2 : Corrigé

Exercice 1 *(barème approximatif : 1,5 points)*

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

1. Montrer que $\ker u \subset \ker(v \circ u)$.

   Réponse : Soit $x \in \ker u$, alors $u(x) = 0$ et donc $v(u(x)) = v(0) = 0$ car v est linéaire.

2. On suppose que v est bijective.

   (a) Montrer que $\ker u = \ker(v \circ u)$.

   Réponse : On a déjà l'inclusion $\ker u \subset \ker(v \circ u)$, il ne reste qu'à montrer l'inclusion inverse.

   Soit donc $x \in \ker(v \circ u)$, x vérifie $v(u(x)) = 0$, donc $u(x)$ est dans $\ker v$. Comme v est bijective, elle est en particulier injective, donc $\ker v = \{0\}$, ce qui prouve que $u(x) = 0$ et donc x est dans $\ker u$.

   (b) En déduire un lien entre le rang de u et le rang de $v \circ u$.

   Réponse : le théorème du rang utilisé successivement pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et pour $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ donne :

   $$\dim E = \dim \ker u + \operatorname{rg} u = \dim \ker(v \circ u) + \operatorname{rg}(v \circ u).$$

   Donc comme $\ker u = \ker(v \circ u)$, ceci montre que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(v \circ u)$.

Exercice 2 *(barème approximatif : 3,5 points)*

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur $\mathbb{K}$ et u une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $\dim E = p$ et $\dim F = q$.

On prend $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ une base de $\ker u$, et $\mathcal{C} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m\}$ une famille de E telle que $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et telle que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E.

1. Dire pourquoi une telle famille $\mathcal{C}$ existe et donner la relation entre m, n et p.

   Réponse : la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\ker u$ donc une famille ***libre*** (**attention à ne pas oublier cette hypothèse !**) de E. On peut la compléter d'après le théorème de la base incomplète en une base de E (en lui adjoignant $\mathcal{C}$ en l'occurence).

   Comme $\dim E = p$ et que la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E et contient exactement $n + m$ éléments, on a l'égalité :

   $$p = n + m.$$

2. Montrer que $u(\mathcal{C})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.

   Réponse : remarquons d'abord que les $u(\vec{g}_j)$ appartiennent bien à $\operatorname{Im} u$, $\forall j = 1, \ldots, m$.

   De plus, soit $\vec{y} \in \operatorname{Im} u$. Il existe $\vec{x} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = \vec{y}$. Comme $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E, c'est une famille génératrice de E, donc il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(\beta_j)_{j=1,\ldots,m}$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{g}_j$. Par linéarité de u, il vient :

   $$\vec{y} = u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(\vec{e}_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j u(\vec{g}_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j u(\vec{g}_j),$$

   car les $\vec{e}_i$ sont dans $\ker u$. Donc $(u(\vec{g}_j))_{j=1,\ldots,m}$ est bien génératrice de $\operatorname{Im} u$.

   Autre méthode : $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E, donc c'est une famille génératrice de E, ce qui implique que $u(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ est générateur de $\operatorname{Im} u$. De plus, comme $\mathcal{B}$ est une base de $\ker u$, on a $u(\vec{e}_i) = 0,\ \forall i = 1, \ldots, n$, donc

   $$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect} \langle u(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) \rangle = \operatorname{Vect} \langle u(\mathcal{C}) \rangle,$$

   donc $u(\mathcal{C})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.

3. Montrer que $u(\mathcal{C})$ est une famille libre de $\operatorname{Im} u$.

   Réponse : soit m scalaires $(\beta_j)_{j=1,\dots,m}$ tels que $\sum_{j=1}^m \beta_j u(\vec{g}_j) = 0$. Ceci implique par linéarité de u que $u\left(\sum_{j=1}^m \beta_j \vec{g}_j\right) = 0$, et donc que $\sum_{j=1}^m \beta_j \vec{g}_j$ appartient à $\ker u$. Or $\mathcal{B}$ est une base de $\ker u$, donc il existe des scalaires $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ tels que

   $$\sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{g}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j \vec{g}_j = 0,$$

   ce qui implique que les α_i et les β_j sont tous nuls car $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E. Comme les β_j sont tous nuls, cela signifie que $u(\mathcal{C})$ est une famille libre.

4. En déduire la relation entre les dimensions de $\ker u$, de $\operatorname{Im} u$ et la dimension de E ou F.

   Réponse : d'après les 2 questions précédentes, on déduit que $u(\mathcal{C})$ est une base de $\operatorname{Im} u$. Comme $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de E et que $\mathcal{B}$ est une base de $\ker u$, il vient :

   $$\dim \ker u + \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{card}(\mathcal{B}) + \operatorname{card}(u(\mathcal{C})) = n + m = p = \dim E.$$

   On vient de démontrer le théorème du rang.

Exercice 3 *(barème approximatif : 5 points)*

Soit $\mathcal{P}_3$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On note $\mathcal{E} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ la base canonique de $\mathcal{P}_3$. Soit l'application $u : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3$ définie par :

$$u(p) = \alpha p + p' \quad \forall p \in \mathcal{P}_3,$$

où α est un réel fixé et p' est la dérivée de p.

1. Montrer que l'application u est linéaire.

   Réponse : soit λ et μ deux scalaires et p et q deux polynômes de $\mathcal{P}_3$. Alors

   $$u(\lambda p + \mu q) = \alpha(\lambda p + \mu q) + (\lambda p + \mu q)' = \alpha\lambda p + \lambda p' + \alpha\mu q + \mu q' = \lambda\, u(p) + \mu\, u(q),$$

   d'après la linéarité de la dérivation, ce qui prouve la linéarité de u.

2. Rappeler la définition des p_i et calculer $u(p_i)$, pour $i = 0, \dots, 3$.

   Réponse : par définition, $p_i(t) = t^i$, $\forall i = 0, 1, \dots$ La dérivée de p_i s'écrit immédiatement :

   $$p_i' = i p_{i-1}, \forall i \geq 1, \qquad \text{et} \qquad p_0' = 0.$$

   On en déduit

   $$u(p_i) = \alpha p_i + i p_{i-1}, \forall i \geq 1, \qquad \text{et} \qquad u(p_0) = \alpha p_0.$$

3. Écrire la matrice M associée à u dans la base $\mathcal{E}$.

   Réponse : on écrit les composantes du vecteur $u(p_j)$ (écrit dans la base $\mathcal{E}$) dans la colonne j de M. Il vient :

   $$M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4. Calculer le déterminant de M (on justifiera avec soin le calcul effectué).

   Réponse : le déterminant vaut $\det M = \alpha^4$. Plusieurs possibilités existent pour justifier : il suffit de dire que la matrice est triangulaire donc le déterminant est le produit des termes diagonaux, mais on demande plus de détails ici. On pourrait développer par rapport à la dernière ligne ou par rapport à la première colonne qui donnent des calculs simples.

Pour s'amuser un peu, on développe 3 fois de suite par rapport à la première ligne :

$$\det M = \alpha \det \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^2 \det \begin{pmatrix} \alpha & 3 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha^4,$$

en remarquant que les déterminants où apparaissent des colonnes nulles sont nuls.

5. On prend maintenant la famille $\mathcal{F} = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ définie par

$$q_0(t) = 1, \quad q_1(t) = t, \quad q_2(t) = t(t+1), \quad q_3(t) = t(t+1)(t+2) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{P}_3$.

Réponse : remarquons d'abord que les q_j sont de degré inférieur ou égal à 3, donc appartiennent bien à $\mathcal{P}_3$.

La famille $\mathcal{F}$ contient 4 éléments de $\mathcal{P}_3$, autant que la dimension de $\mathcal{P}_3$, donc il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre (ou génératrice) pour montrer que c'est une base. On montre qu'elle est libre. Soit $(\lambda_j)_{j=0,\ldots,3}$ des scalaires tels que $\sum_{j=1}^{3} \lambda_j q_j = 0$. Ceci implique que pour tout t dans $\mathbb{R}$

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t(t+1) + \lambda_3 t(t+1)(t+2) = 0,$$

donc en prenant successivement $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ puis $t = 3$ (par exemple), on obtient que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc $\mathcal{F}$ est libre, c'est une base de $\mathcal{P}_3$.

6. Écrire la matrice Q de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$.

Réponse : les q_j s'expriment facilement en fonction des p_i :

$$q_0 = p_0, \quad q_1 = p_1, \quad q_2 = p_2 + p_1, \quad q_3 = p_3 + 3p_2 + 2p_1.$$

Q contient en colonne les composantes des vecteurs q_j écrits dans la base $\mathcal{E}$ ("nouvelle base écrite dans l'ancienne base").

$$Q = Q_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : Q est inversible en tant que matrice de changement de bases, ce qu'on voit immédiatement car Q est triangulaire supérieure et son déterminant vaut 1 ($\neq 0$).

7. Écrire les polynômes $(p_i)_{i=0,1,2,3}$ en fonction des polynômes $(q_j)_{j=0,1,2,3}$. En déduire Q^{-1}.

Réponse : inversement, les p_i s'expriment en fonction des q_j :

$$p_0 = q_0, \quad p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2 - q_1, \quad p_3 = q_3 - 3q_2 + q_1.$$

Q^{-1} contient en colonne les composantes des vecteurs p_i écrits dans la base $\mathcal{F}$:

$$Q^{-1} = Q^{-1}_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que Q^{-1} est triangulaire supérieure, comme Q.

8. Écrire la matrice N associée à u dans la base $\mathcal{F}$ en utilisant la formule de changement de bases.

Réponse : on a

$$N = Q^{-1} M Q \quad (\text{autrement dit : } N_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{F}} = Q^{-1}_{\mathcal{F}\leftarrow\mathcal{E}} M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}} Q_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{F}}),$$

ce qui s'exprime

$$\begin{aligned} N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha+2 & 2\alpha+6 \\ 0 & 0 & \alpha & 3\alpha+3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

9. Calculer $u(q_j)$, pour $j = 0, 1, 2, 3$. Conclure.

Réponse : on écrit les composantes du vecteur $u(q_j)$ **dans la base** $\mathcal{F}$!! Il vient (après de très courts calculs pour q_3) :

$$q_0' = 0, \quad q_1' = q_0, \quad q_2' = 2t + 1 = 2q_1 + q_0, \quad q_3' = 3t^2 + 6t + 2 = 3q_2 + 3q_1 + 2q_0,$$

et

$$u(q_0) = \alpha q_0, \quad u(q_1) = \alpha q_1 + q_0, \quad u(q_2) = \alpha q_2 + 2q_1 + q_0, \quad u(q_3) = \alpha q_3 + 3q_2 + 3q_1 + 2q_0.$$

On remarque que les composantes de $u(q_j)$ exprimées dans la base $\mathcal{F}$ sont les colonnes de N, ce qui est normal (N est la matrice représentant u dans la base $\mathcal{F}$, et M est la matrice de u dans la base $\mathcal{E}$).