MT23 - P2017 - Test 1 - Corrigé

Exercice 1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, une base de E.
Répondre aux questions suivantes.
Lorsque la réponse est OUI, donner une famille possible (on l'exprimera en fonction des vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) sans justifier.
Lorsque la réponse est NON, justifier soigneusement votre réponse en citant les résultats du cours utilisés.

1. Existe-t-il une famille de 4 vecteurs, liée et génératrice de E ?
   Une solution : OUI, par exemple la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2)$: elle est liée car le 4ème vecteur est combinaison linéaire des 2 premiers, elle est génératrice car sur-famille d'une famille génératrice.
2. Existe-t-il une famille de 3 vecteurs, liée et génératrice de E ?
   Une solution : NON, car la dimension de E est 3 (base de 3 éléments), donc une famille génératrice possédant 3 vecteurs est une base, donc elle est libre.
3. Existe-t-il une famille de 2 vecteurs, libre et génératrice de E ?
   Une solution : NON, car dans un espace de dimension 3, toute famille génératrice a au moins 3 éléments.
4. Existe-t-il une famille de 2 vecteurs de E, liée ?
   Une solution : OUI, par exemple $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1)$.

Exercice 2

1. On définit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}.$$
   (a) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Une solution :
   – $\vec{0} \in H$ donc $H \neq \emptyset$.
   – Soit $\vec{x}, \vec{y} \in H$, $(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)-(x_3+y_3) = (x_1-2x_2-x_3)+(y_1-2y_2-y_3) = 0+0 = 0$ donc $\vec{x}+\vec{y} \in H$.
   – Soit $\vec{x} \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x_1 - 2\lambda x_2 - \lambda x_3 = \lambda(x_1 - 2x_2 - x_3) = \lambda.0 = 0$ donc $\lambda\vec{x} \in H$.

   (b) Déterminer une base de H.
   Une solution :
$$\vec{x} \in H \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 = 2x_2 + x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = (2x_2 + x_3, x_2, x_3) \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = x_2(2,1,0) + x_3(1,0,1) \\ x_2, x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$
   Si on note $\vec{v}_1 = (2,1,0), \vec{v}_2 = (1,0,1)$, on vérifie que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ appartiennent à H, d'autre part tout vecteur de H est combinaison linéaire de ces 2 vecteurs, donc la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est génératrice de H.
   On vérifie que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est libre, en effet $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (ou on peut constater qu'ils ne sont pas proportionnels).
   Donc $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de H.
2. Soit E un espace vectoriel sur K, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Quelle est la définition de $E = F + G$?
   Une solution :
$$\forall \vec{x} \in E, \ \exists \vec{y} \in F, \ \exists \vec{z} \in G, \ \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}.$$
   (b) On suppose que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E. On définit
$$F = \text{vect } < \vec{e}_1, \vec{e}_2 >, \ G = \text{vect } < \vec{e}_3 > .$$

i. Montrer que $E = F + G$

Une solution : Quel que soit $\vec{x} \in E$, il se décompose sur la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, donc

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = (\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2) + \alpha_3\vec{e}_3.$$

Or $\vec{y} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 \in F$, $\vec{z} = \alpha_3\vec{e}_3 \in G$, donc $\vec{x} \in F + G$.

ii. Montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Une solution :

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in F \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 \\ \vec{x} = \alpha_3\vec{e}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 \\ \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 - \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ (car la famille } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \text{ est libre)} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

3. On définit $G = \text{vect} \ < (1, 0, 0) >$.

(a) Utiliser les questions précédentes pour démontrer que

$$\mathbb{R}^3 = H \oplus G.$$

Une solution : On reprend les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de la base de H et on note $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$.
Si on montre que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors d'après la question précédente on aura $\mathbb{R}^3 = H + G$ et $H \cap G = \{\vec{0}\}$, ce qui est la définition de $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$.
La dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, donc il suffit de montrer que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre

$$\begin{aligned}
\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_1(2, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 & & = 0 \\ & \alpha_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.
\end{aligned}$$

(b) Soit $\vec{x} = (1, 2, 3)$, déterminer $\vec{y} \in H$, $\vec{z} \in G$ tels que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Une solution : On recherche $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3$. On obtient le système :

$$\begin{aligned}
\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \vec{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_1(2, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(1, 0, 0) = (1, 2, 3) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 & & = 2 \\ & \alpha_2 & = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = -6 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $\vec{y} = 2(2, 1, 0) + 3(1, 0, 1) = (7, 2, 3)$ et $\vec{z} = (-6, 0, 0)$
On aurait également pu poser $\vec{y} = (2y_2 + y_3, y_2, y_3), \vec{z} = (z_1, 0, 0)$ puis déterminer y_2, y_3, z_1 tels que $\vec{y} + \vec{z} = (1, 2, 3)$.

Exercice 3 Soit u une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3).$$

1. Montrer que u est une application linéaire.

Une solution :

- Soit $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$,
$$\begin{array}{rcl} u(\vec{x}+\vec{y}) & = & ((x_1+y_1)+(x_2+y_2),(x_2+y_2)-(x_3+y_3)) \\ & = & ((x_1+x_2)+(y_1+y_2),(x_2-x_3)+(y_2-y_3)) \\ & = & (x_1+x_2,x_2-x_3)+(y_1+y_2,y_2-y_3) \\ & = & u(\vec{x})+u(\vec{y}) \end{array}.$$
- Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} u(\lambda\vec{x}) & = & (\lambda x_1+\lambda x_2,\lambda x_2-\lambda x_3) \\ & = & (\lambda(x_1+x_2),\lambda(x_2-x_3)) \\ & = & \lambda(x_1+x_2,x_2-x_3) \\ & = & \lambda u(\vec{x}) \end{array}$$

2. Donner une base de $\operatorname{Ker} u$.
Une solution :
$$\begin{array}{rcl} \vec{x} \in \operatorname{Ker} u & \Leftrightarrow & \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x_1=-x_2 \\ x_3=x_2 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \vec{x}=(-x_2,x_2,x_2) \\ & \Leftrightarrow & \vec{x}=x_2(-1,1,1) \end{array}$$
On a bien $(-1,1,1) \in \operatorname{Ker} u$ donc $\operatorname{Ker} u = \text{vect} < (-1,1,1) >$.
C'est un vecteur non nul, donc une famille libre.
$((-1,1,1))$ est par conséquent une base de $\operatorname{Ker} u$.

3. Calculer l'image par u des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Une solution : $u(1,0,0)=(1,0)$, $u(0,1,0)=(1,1)$, $u(0,0,1)=(0,-1)$.

4. u est-elle injective ? surjective ? (on justifiera soigneusement les réponses).
Une solution : $\operatorname{Ker} u \neq \{\vec{0}\}$ donc u n'est pas injective.
D'après la question précédente, $\operatorname{Im} u = \text{vect} < (1,0),(1,1),(0,-1) >$ et $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^2$ donc $\dim \operatorname{Im} u \leq 2$. $((1,0),(0,-1))$ est clairement une famille libre, donc une base de $\operatorname{Im} u$. On a donc $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}^2$ donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ et u est surjective.

5. Donner la matrice A associée à u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
Une solution : D'après les calcul de la question 3, on écrit facilement la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$