MT23 - A2019 - Examen médian - Correction

Exercice 1 (*barème : 4.5 points*)

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on cherche $x \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $Ax = b \ \ (S)$.

1. (a) Est-ce que le système (S) peut admettre une solution unique ? Justifier soigneusement la réponse.

   Correction : On sait que dim Ker A + rang $A = 4$. Sachant que rang $A \leq 3$, on a forcément dim Ker $A \geq 1$.
   Donc $\exists\, x^* \neq 0 \in$ Ker A tel que $Ax^* = 0$. Soit x solution de (S), alors $A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b$ donc $x + x^*$ est encore solution de (S).

   (b) Peut-on avoir une solution pour tout $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? Justifier soigneusement la réponse.

   Correction : Sachant que rang $A \leq 3$ et que Im $A \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut tout à fait avoir rang $A = 3$ et Im $A = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc, si rang $A = 3$, $\forall b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $b \in$ Im A et donc (S) admet une infinité de solutions.

2. On définit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -4 & -3 & -5 \\ 2 & 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

   (a) De quels espaces vectoriels Im A et Ker A sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

   Correction : Im A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{31}$, Ker A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{41}$.

   (b) Quel est le rang de A ? En déduire une base de Im A.

   Correction : A_1, la première colonne de A, est non nulle. On constate de plus que
   $A_2 = 4A_1, A_3 = 3A_1, A_4 = 5A_1$. Donc rang $A = 1$.
   On a alors Im A = vect $< A_1, A_2, A_3, A_4 >=$ vect $< A_1 >$.
   Une base possible de Im A est donc (A_1).

   (c) Sans calcul supplémentaire, existe-t-il un vecteur $b \neq 0$ pour lequel il existe une infinité de solutions ? Si oui, donner un tel vecteur.

   Correction : Il suffit de prendre un $b \in$ Im A, par exemple $b = A_1$.

   (d) Déterminer une base de Ker A.

Correction : Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{41}$.

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } A &\Leftrightarrow Ax = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 = -4x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -4x_2 - 3x_3 - 5x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie que les vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A$.
La famille (V_1, V_2, V_3) est donc génératrice de Ker A.
On sait de plus que rang $A = 1$, donc dim Ker $A = 4 - 1 = 3$, donc la famille génératrice de trois vecteurs (V_1, V_2, V_3) est une base de Ker A. On aurait pu également montrer que cette famille était libre.

(e) Ecrire A comme le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.
Correction : On a déjà remarqué que $A_2 = 4A_1, A_3 = 3A_1, A_4 = 5A_1$, on peut donc écrire

$$A = A_1(1\ 4\ 3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1\ 4\ 3\ 5);$$

Exercice 2 (*barème : 13 points*)

Soit n est un entier non nul. On note $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et I_n la matrice identité.

Soit $M \in E$, on définit l'application f par $f(M)$=trace$(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

PARTIE I

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
   Correction : Etant donné deux matrices M et M' appartenant à E et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(M + M') &= \sum_{i=1}^{n}(m_{ii} + m'_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} + \sum_{i=1}^{n} m'_{ii} = f(M) + f(M'). \\ f(\alpha M) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha m_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} m_{ii} = \alpha f(M). \end{aligned}$$

2. Montrer que f est surjective sur $\mathbb{R}$.
   Correction : On sait que $f(I_n) = n$ donc $\forall y \in \mathbb{R}$, on a, par exemple, $f\left(\frac{y}{n} I_n\right) = \frac{y}{n} f(I_n) = y$, donc y a un antécédent.

3. Utiliser la question précédente pour calculer dim (Ker f).
   Correction : dim Ker f + rang f = dim E.
   Puisque f est surjective sur $\mathbb{R}$, Im $(f) = \mathbb{R}$, donc rang $(f) = 1$.
   On sait que dim $E = n^2$, on a donc dim Ker $f = n^2 - 1$.
4. On note $G = \text{vect} < I_n >$.
   (a) Démontrer que $E = \text{Ker } f \oplus G$.
   Correction : On sait que

$$E = \text{Ker } f \oplus G \Leftrightarrow \dim E = \dim \text{Ker } f + \dim G \quad \text{et} \quad \text{Ker } f \cap G = \{0\}.$$

   (I_n) est, par définition, une famille génératrice de G. Cette famille réduite à un seul élément non nul est donc libre, c'est une base, donc dim $G = 1$.
   On a bien dim $E = n^2 = \dim \text{Ker } f + \dim G = n^2 - 1 + 1$.
   $M \in \text{Ker } f \cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(M) = 0 \\ M = \alpha I_n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{trace}\,(\alpha I_n) = 0 \\ M = \alpha I_n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n\alpha = 0 \\ M = \alpha I_n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ M = \alpha I_n \end{array}\right.$
   $\Rightarrow M = 0$.
   (b) Donner la décomposition de M ainsi obtenue.
   Correction : $\forall M \in E, M = \alpha I_n + (M - \alpha I_n)$.
   On a bien $\alpha I_n \in G$ et on doit avoir $(M - \alpha I_n) \in \text{Ker } f$:
   $(M - \alpha I_n) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \text{trace}\,(M - \alpha I_n) = 0 \Leftrightarrow \text{trace}\,(M) - \alpha n = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\text{trace}\,(M)}{n}$
   La décomposition est donc $M = \alpha I_n + (M - \alpha I_n)$ avec $\alpha = \dfrac{\text{trace}\,(M)}{n}$.

PARTIE II

On pose maintenant $n = 2$.
Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, on a toujours $f(M) = \text{trace}(M) = m_{11} + m_{22}$
et on définit $g : E \to E$ par $g(M) = \begin{pmatrix} 2m_{11} + m_{22} & m_{11} + m_{12} + m_{22} \\ m_{11} + m_{21} + m_{22} & -2m_{11} - m_{22} \end{pmatrix}$

1. Déterminer une base de Ker f.
   Correction :

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker } f & \Leftrightarrow m_{22} = -m_{11} \\ & \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & -m_{11} \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow M = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Si on note

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On vérifie que les matrices M_1, M_2, M_3 appartiennent à Ker f, elles forment donc une famille génératrice de Ker f. On vérifie que cette famille est libre :

$$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

   La famille (M_1, M_2, M_3) est donc une base de Ker f.
2. On admettra que g est linéaire de E dans E.
   (a) Soit $M \in \text{Ker } f$, vérifier que $g(M) = M$.

Correction : Si $M \in \text{Ker } f$, on a $m_{11} + m_{22} = 0$, on a donc
$g(M) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & -m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = M$.

(b) En déduire que $\text{Ker } f \subset \text{Im } g$.

Correction : Si $M \in \text{Ker } f$, $M = g(M)$ donc M appartient à $\text{Im } g$.
Donc $\text{Ker } f \subset \text{Im } g$.

3. (a) Montrer que $fog = 0$.

Correction : $\forall M \in E, f(g(M)) = 2m_{11} + m_{22} - 2m_{11} - m_{22} = 0$.
Donc fog est l'application nulle.

(b) En déduire que $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$.

Correction : Soit $M \in \text{Im } g$, alors $\exists M' \in E$ tq $M = g(M')$.
On a donc $f(M) = fog(M') = 0$, donc $M \in \text{Ker } f$.
Donc $\text{Im } g \subset \text{Ker } f$.

4. (a) Que vaut le rang de g ?

Correction : Le rang de g est égal à la dimension de $\text{Im } g$.
On vient de montrer par double inclusion que $\text{Ker } f = \text{Im } g$.
On avait démontré dans la question 1 que la dimension de $\text{Ker } f$ est égale à 3 (on a en effet trouvé une base de $\text{Ker } f$ constituée de 3 vecteurs).
Le rang de g est donc égal à 3.

(b) Quelle est la dimension de $\text{Ker } g$?

Correction : g est une application de E dans E et la dimension de E vaut 4.
On a donc $\dim \text{Ker } g + \dim \text{Im } g = 4$, ce qui implique que $\dim \text{Ker } g = 1$

(c) Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ sont supplémentaires dans $M_{22}(\mathbb{R})$.

Correction : Pour montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ sont supplémentaires dans E, il faut démontrer que $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Ker } g = \dim E$ et $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0_{22}\}$.
La relation entre les dimensions est bien vérifiée $(3 + 1 = 4)$, étudions l'intersection :

$$M \in \text{Ker } f \cap \text{Ker } g \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g(M) = M \\ g(M) = 0_{22} \end{array} \right. \Rightarrow M = 0_{22}.$$

On a donc bien $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0_{22}\}$, ce qui termine de démontrer que $\text{Ker } g$ et $\text{Ker } f$ sont supplémentaires dans E.

5. (a) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, soit (V, W, T) une famille libre quelconque de $\text{Ker } f$. Montrer que (U, V, W, T) est une famille libre (on pourra utiliser la question précédente).

Correction : On calcule $g(U)$ et on trouve $g(U) = 0_{22}$, donc $U \in \text{Ker } g$.
$aU + bV + cW + dT = 0_{22} \Leftrightarrow -aU = bV + cW + dT$
On a $-aU \in \text{Ker } g$ et $bV + cW + dT \in \text{Ker } f$.
Puisque $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \{0_{22}\}$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} aU = 0_{22} \\ bV + cW + dT = 0_{22} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a = 0 & \text{car } U \neq 0_{22} \\ b = c = d = 0 & \text{car la famille } (V, W, T) \text{ est libre} \end{array} \right.$$

(b) En déduire que $\mathcal{B} = (U, V, W, T)$ est une base de E.

Correction : $\mathcal{B} = (U, V, W, T)$ est une famille libre qui contient 4 vecteurs, la dimension de E vaut 4, donc $\mathcal{B}$ est une base de E.

6. Ecrire la matrice de g lorsque l'on munit E de la base $\mathcal{B}$.

Correction : On a $g(U) = 0_{22}$, $V, W, T \in \text{Ker } f$, donc $g(V) = V, g(W) = W, g(T) = T$, la matrice de g est donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. En déduire, sans calcul supplémentaire, des valeurs propres et vecteurs propres de g.
Correction : $g(U) = 0_{22}$ donc 0 est valeur propre et U est un vecteur propre associé à 0.
$g(V) = V, g(W) = W, g(T) = T$ donc 1 est valeur propre et V, W, T sont des vecteurs propres associés à 1.

Exercice 3 (*barème : 4.5 points*)

Soit $B \in \mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$ une matrice telle que dim Ker $B = 2$. On note (C_1, C_2) une base de Ker B.

1. On note 0_{pq} la matrice nulle appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$. On précisera dans tout l'exercice la dimension des matrices nulles utilisées.
Soit $F = \{X \in \mathcal{M}_{42}(\mathbb{R}), BX = 0_{32}\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{42}(\mathbb{R})$.
Correction :
— $0_{42} \in F$, donc F est non vide.
— Si $X \in F, X' \in F$, alors $B(X + X') = BX + BX' = 0_{32} + 0_{32} = 0_{32}$ donc $X + X' \in F$.
— Si $X \in F$, alors $B(\alpha X) = \alpha BX = \alpha 0_{32} = 0_{32}$ donc $\alpha X \in F$.
Donc F est un sous-espace vectoriel.

(b) On définit les matrices M, N, P, Q par colonnes de la façon suivante :
$M = (C_1 \;\; 0_{41}),\; N = (C_2 \;\; 0_{41}),\; P = (0_{41} \;\; C_1),\; Q = (0_{41} \;\; C_2)$.
Montrer que les matrices M, N, P, Q appartiennent à F.
Correction : On sait que C_1 et C_2 appartiennent à Ker B, donc $BC_1 = BC_2 = 0_{31}$.
D'après la définition du produit matriciel, on sait que, par exemple, la première colonne du produit BM est égale au produit de B par la première colonne de M, on obtient donc

$$BM = B(C_1 \;\; 0_{41}) = (BC_1 \;\; B0_{41}) = (0_{31} \;\; 0_{31}) = 0_{32}.$$
$$BN = B(C_2 \;\; 0_{41}) = (BC_2 \;\; B0_{41}) = (0_{31} \;\; 0_{31}) = 0_{32}.$$
$$BP = B(0_{41} \;\; C_1) = (B0_{41} \;\; BC_1) = (0_{31} \;\; 0_{31}) = 0_{32}.$$
$$BQ = B(0_{41} \;\; C_2) = (B0_{41} \;\; BC_2) = (0_{31} \;\; 0_{31}) = 0_{32}.$$

Donc les matrices M, N, P, Q appartiennent à F.

(c) Montrer que (M, N, P, Q) est une famille libre.
Correction :

$$\begin{aligned} \alpha_1 M + \alpha_2 N + \alpha_3 P + \alpha_4 Q = 0_{42} &\Leftrightarrow (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 \quad \alpha_3 C_1 + \alpha_4 C_2) = (0_{41} \; 0_{41}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = 0_{41} \\ \alpha_3 C_1 + \alpha_4 C_2 = 0_{41} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \end{cases} \quad \text{car } (C_1, C_2) \text{ est une famille libre.} \end{aligned}$$

La famille (M, N, P, Q) est donc libre.

(d) Montrer que
$$X = (X_1 \ X_2) \in F \Leftrightarrow X_1 \in \text{Ker } B, X_2 \in \text{Ker } B.$$

Correction : $X = (X_1 \ X_2) \in F \Leftrightarrow B(X_1 \ X_2) = 0_{32} \Leftrightarrow (BX_1 \ \ BX_2) = (0_{31} \ 0_{31})$
$\Leftrightarrow \begin{cases} BX_1 = 0_{31} \\ BX_2 = 0_{31} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 \in \text{Ker } B \\ X_2 \in \text{Ker } B \end{cases}$

(e) En déduire que (M, N, P, Q) est une famille génératrice de F.
Correction : (C_1, C_2) est une base de Ker B donc $X_1 = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ et $X_2 = \alpha_3 C_1 + \alpha_4 C_2$
D'où
$$X = (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 \ \ \alpha_3 C_1 + \alpha_4 C_2) = \alpha_1 M + \alpha_2 N + \alpha_3 P + \alpha_4 Q.$$

On sait que la famille (M, N, P, Q) appartient à F d'après la question 1.(b), c'est donc une famille génératrice de F.

2. On définit l'application u de $\mathcal{M}_{42}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$ par $u(X) = BX$.
Quelle est la dimension de Ker u ? Quel est le rang de u ?
Correction : $X \in \text{Ker } u \Leftrightarrow BX = 0_{32} \Leftrightarrow X \in F$.
On a démontré à la question précédente que (M, N, P, Q) est une famille libre et génératrice de F, c'est donc une base de F. La dimension de $F = \text{Ker } u$ vaut donc 4.
Sachant que $\dim \mathcal{M}_{42}(\mathbb{R}) = 8$, on a rang $(u) = 8 - \dim \text{Ker } u = 4$.