MT23 - A2019 - Test 2 - Correction

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire les valeurs propres de A.
   Correction :
   $$\pi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1.$$
   On calcule les racines (complexes) de cette équation : $\lambda = i$ ou $\lambda = -i$.
2. (a) Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour déterminer A^4.
   Correction : D'après le théorème de Cayley Hamilton on a $\pi_A(A) = 0$ c'est à dire $A^2 + I = 0$. On obtient donc $A^2 = -I$ et $A^4 = (A^2)^2 = (-I)^2 = I$.

   (b) En déduire A^9.

   Correction : $A^9 = (A^4)^2 \times A = I \times A = A$.
3. (a) Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale appartenant à $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Que vaut D ? Ne pas calculer P mais expliquer comment on obtient P et D.
   Correction : A admet deux valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, d'où l'existence de P et D.
   La matrice diagonale D, semblable à A, contient donc les valeurs propres sur sa diagonale, par exemple $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
   $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PD \Leftrightarrow AP_1 = iP_1$ et $AP_2 = -iP_2$: la matrice P est donc formée des 2 vecteurs propres.

   (b) Utiliser la question précédente pour calculer A^9. Comparer avec ce qui a été obtenu précédemment.
   Correction : On peut montrer par récurrence que $\forall n \geq 1,\ A^n = PD^nP^{-1}$.
   Ceci est vrai pour $n = 1$: $A = PDP^{-1}$.
   On suppose que c'est vrai pour k, on a alors
   $A^{k+1} = A^k \times A = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{k+1}P^{-1}$.
   Ce qui termine la démonstration. Il suffit alors d'appliquer le résultat avec $n = 9$:
   On calcule $D^9 = \begin{pmatrix} i^9 & 0 \\ 0 & (-i)^9 \end{pmatrix}$. On sait que $i^4 = 1$ donc $i^9 = i$.
   D'où $D^9 = D$ et $A^9 = PD^9P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

   (c) Calculer P.

   Correction : $(A - iI)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -iy_1 + y_2 = 0 \\ -y_1 - iy_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = iy_1 \Leftrightarrow Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.
   Les deux valeurs propres étant conjuguées, les vecteurs le sont aussi et on obtient pour $\lambda = -i$: $Y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}),\ n \geq 2$.

1. Donner la définition de «A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ».

   Correction : A est diagonalisable dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow\ \exists\, D$ diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
2. On suppose que A est diagonalisable et admet une unique valeur propre λ, que vaut A dans ce cas ?
   Correction : Si A est diagonalisable, elle est semblable à D avec $D = \lambda I$.
   Donc $A = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda PIP^{-1} = \lambda I$.

3. Montrer que
A est diagonalisable dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Correction :

$$\begin{aligned}
A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, D \text{ diagonale et } P \text{ inversible telles que } A = PDP^{-1} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, D = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \text{ et } P \text{ inversible telles que } AP = PD \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, P = (P_1 \dots P_n) \text{ inversible telle que } AP_i = \mu_i P_i,\ i = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \text{ une base } \mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n) \text{ telle que } AP_i = \mu_i P_i,\ i = 1, \dots, n \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \text{ une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ constituée de vecteurs propres de } A
\end{aligned}$$

4. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de A.
Montrer que $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p} \Rightarrow \exists$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
Correction : Si $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_p}$ alors
$x \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists!\, x_1 \in V_{\lambda_1}, \dots, \exists!\, x_p \in V_{\lambda_p}$ tq $x = x_1 + \dots x_p$
Soit $(y_1, \dots, y_q)$ une base de $V_{\lambda_1}, \dots, (z_1, \dots, z_m)$ une base de V_{λ_p}, alors
$x = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_q y_q + \dots + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_m z_m$.
On a donc $(y_1, \dots, y_q, \dots, z_1, \dots, z_m)$ famille génératrice de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
De plus, $\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_p} = \dim \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ donc c'est une base.
Cette famille étant constituée de vecteurs propres (car éléments des V_{λ_i}), on a bien une base de vecteurs propres.

5. On suppose que rang $(A) = 1$.
   (a) Donner une valeur propre λ_1 de A. Que peut-on dire de sa multiplicité ?
   Correction : Le rang de A vaut 1 donc rang $A < n$ et A n'est pas inversible, d'où $\lambda_1 = 0$ est valeur propre de A.
   De plus, $\dim \operatorname{Ker} A = n - 1$ et $\operatorname{Ker} A = V_{\lambda_1}$, sous-espace propre associé à λ_1, donc $d_1 = n - 1$.
   La multiplicité de λ_1 vérifie donc $r_1 \geq n - 1$.
   (b) On suppose que trace $(A) = 0$.
      i. Donner toutes les valeurs propres de A et leur multiplicité.
      Correction : A admet n valeurs propres, donc si $r_1 = n - 1$, il existerait une autre valeur propre simple $\lambda_2 \neq 0$ et la somme des valeurs prores vaudrait λ_2. Or la somme des valeurs propres est égale à la trace de A qui est nulle. Il est donc impossible que $r_1 = n - 1$. Donc $r_1 = n$: 0 est la seule valeur propre de A (de multiplicité n).

      ii. A est-elle diagonalisable ? (justifier la réponse)
      Correction : Si on note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les p valeurs propres distinctes de A, si on note $d_1, ..., d_p$ les dimensions des sous-espaces propres associés, $r_1, ..., r_p$ les multiplicités, alors

      $$A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \sum_{i=1}^{p} r_i = n, \text{ et } \quad \forall i = 1, ...p,\ d_i = r_i.$$

      Ici on a $d_1 = n - 1 < n = r_1$.

      Autre raisonnement possible :
      Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice D qui est nulle puisque toutes les valeurs propres de A sont nulles, donc on aurait $A = PDP^{-1} = 0$, or le rang de A vaut 1, donc A n'est pas nulle, donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux paramètres réels.

1. Sans aucun calcul, dire si la matrice est diagonalisable dans le cas $a = 0$.
   Correction : Si $a = 0$, 0 est valeur propre triple de A. Si A était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice nulle et on aurait $A = PDP^{-1} = 0$ donc A n'est pas diagonalisable.
2. Donner les valeurs propres de A en précisant leurs multiplicités.
   Correction : A est une matrice triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont donc

$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = a.$$

   — Si $a \neq 0$, il y a 2 valeurs propres distinctes $\lambda_0 = 0$ qui est double et $\lambda_1 = a$ qui est simple.
   — Si $a = 0$, il y a une seule valeur propre triple $\lambda_0 = 0$.
3. Pour a et b quelconques, calculer le rang de A.
   Correction : $\det A = 0$, donc rang $A < 3$. De plus, $\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, il existe donc une matrice 2×2 extraite inversible donc rang $A \geq 2$. On a donc rang $A = 2$.
4. A est-elle diagonalisable ? Utiliser ce qui précède et citer précisément le(s) théorème(s) utilisé(s).
   Correction : Si on note $V_0 = \text{Ker } A$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 0, on a

$$d_0 = \dim V_0 = 3 - \text{rang } A = 1.$$

   Or la multiplicité $r_0 = 2$ ou $r_0 = 3$, on a donc, quels que soient a et b, $d_0 < r_0$.
   On peut alors utiliser le théorème suivant :

$$A \text{ est diagonalisable dans } K \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} r_i = n, \text{ et } \forall i = 1, ..., p, \quad d_i = r_i$$

   A n'est donc pas diagonalisable puisque $d_0 < r_0$.

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Donner la définition d'un produit scalaire sur E.
   Correction : Un produit scalaire est une application de $E \times E \to \mathbb{R}$ qui à $(\vec{x}, \vec{y})$ associe $< \vec{x}, \vec{y} >$ qui est : $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
   — bilinéaire : $< \alpha\vec{x} + \beta\vec{z}, \vec{y} >= \alpha < \vec{x}, \vec{y} > +\beta < \vec{z}, \vec{y} >$
     et $< \vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z} >= \alpha < \vec{x}, \vec{y} > +\beta < \vec{x}, \vec{z} >$
   — symétrique : $< \vec{x}, \vec{y} >=< \vec{y}, \vec{x} >$
   — définie positive : $< \vec{x}, \vec{x} >\geq 0$ et $< \vec{x}, \vec{x} >= 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$
2. Donner la définition de $F^{\perp}$.
   Correction :

$$F^{\perp} = \{\vec{x} \in E, \ \ \forall \vec{y} \in F, < \vec{x}, \ \vec{y} >= 0, \}.$$