MT23 P17 Examen médian - Corrigé

Exercice 1

1. Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
On note $F = \text{vect} < \vec{e}_1 >$, $G = \text{vect} < \vec{e}_2, \vec{e}_3 >$. On a donc $E = F \oplus G$.
On note u l'endomorphisme de E qui à tout élément $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ de E, avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$, associe $u(\vec{x}) = \vec{z}$.
   (a) Que représente l'application u ?
   Une solution : u est la projection sur G parallèlement à F.
   (b) Quelle est la matrice A associée à u quand on munit E de la base $\mathcal{B}$?
   Une solution : $\vec{e}_1 \in F$, donc $\vec{e}_1 = \vec{e}_1 + \vec{0}$ et $u(\vec{e}_1) = \vec{0}$.
   $\vec{e}_2 \in G$, donc $\vec{e}_2 = \vec{0} + \vec{e}_2$ et $u(\vec{e}_2) = \vec{e}_2$.
   $\vec{e}_3 \in G$, donc $\vec{e}_3 = \vec{0} + \vec{e}_3$ et $u(\vec{e}_3) = \vec{e}_3$.
   En utilisant la définition de la matrice d'une application linéaire, on obtient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soient B et B' deux matrices semblables appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(K)$. Démontrer que B et B' ont le même polynôme caractéristique.
Une solution : B et B' sont semblables $\Leftrightarrow$ il existe P inversible telle que $B = PB'P^{-1}$.
Le polynôme caractéristique d'une matrice B est égal à $p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B)$.
$$\begin{aligned} \det(\lambda I - B) &= \det(P(\lambda I)P^{-1} - PB'P^{-1}) \\ &= \det(P(\lambda I - B')P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(\lambda I - B')\det(P^{-1}) \end{aligned}$$
Or $\det(P^{-1}) = 1/\det(P)$ donc $p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - B') = p_{B'}(\lambda)$.

3. $E = \mathcal{P}_2$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On note (p_0, p_1, p_2) la base canonique de $\mathcal{P}_2$.
On définit les polynômes q_0, q_1, q_2 par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \;\; q_0(t) = t - 1, \;\; q_1(t) = t - 2, \;\; q_2(t) = (t-2)(t-3).$$
   (a) Utiliser les déterminants pour montrer que (q_0, q_1, q_2) est une base de E.
   Une solution : On va utiliser la base canonique comme base de référence et construire la matrice dont les colonnes contiennent les composantes de q_0, q_1 et q_2 dans cette base de référence. On sait que (q_0, q_1, q_2) est une base de E si et seulement si le déterminant de cette matrice est non nul.
   On a
$$q_0 = -p_0 + p_1, \;\; q_1 = -2p_0 + p_1, \;\; q_2 = 6p_0 - 5p_1 + p_2.$$
   On obtient donc le déterminant : $d = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$
   (b) Calculer les composantes de p_0, p_1, p_2 dans la base (q_0, q_1, q_2).
   Une solution : Il suffit de résoudre le système
$$\left\{ \begin{array}{llll} -p_0 & +p_1 & & = q_0 \\ -2p_0 & +p_1 & & = q_1 \\ 6p_0 & -5p_1 & +p_2 & = q_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} p_0 & & & = q_0 - q_1 \\ -2p_0 & +p_1 & & = q_1 \\ 6p_0 & -5p_1 & +p_2 & = q_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_0 = q_0 - q_1 \\ p_1 = 2q_0 - q1 \\ p_2 = 4q_0 + q_1 + q_2 \end{array} \right.$$

(c) On note $F = \text{vect } < q_0 >$, $G = \text{vect } < q_1, q_2 >$.

Soit u la projection sur G parallèlement à F.

On note M la matrice associée à u quand on munit E de la base (q_0, q_1, q_2).

On note N la matrice associée à u quand on munit E de la base (p_0, p_1, p_2).

Quelle relation matricielle lie N à M ? On explicitera les matrices qui interviennent dans cette relation mais on ne calculera pas N.

Une solution : En utilisant la question 1, on trouve $M = A$.

Si on note P la matrice de passage de la base (p_0, p_1, p_2) à la base (q_0, q_1, q_2), on a alors

$$N = PMP^{-1}.$$

La matrice P a déjà été calculée dans la question 3(a), les colonnes de P contiennent les composantes de q_0, q_1, q_2 dans la base (p_0, p_1, p_2), on a donc $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice P^{-1} est la matrice de passage de la base (q_0, q_1, q_2) à la base (p_0, p_1, p_2). Ses colonnes contiennent les composantes de p_0, p_1, p_2 dans la base (q_0, q_1, q_2). On a calculé ces composantes dans la question 3(b), on obtient donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) En déduire les valeurs propres de N et préciser leur multiplicité. N est-elle inversible ?

Une solution : M et N sont semblables donc elles ont le même polynôme caractéristique (cf. question 2), donc les mêmes valeurs propres. M est diagonale donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale : $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1$ ou encore $\lambda_1 = 0$ valeur propre simple, $\lambda_2 = 1$ valeur propre double.

On sait que le déterminant est égal à la multiplication des valeurs propres. 0 est valeur propre donc $\det N = 0$ et N n'est pas inversible.

Exercice 2

On note I_n la matrice identité appartenant à $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ on cherche $x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$(S) \quad Ax = b.$$

Dans un premier temps, on ne demande pas de résoudre le système.

(a) Quel est le rang de A ?

Une solution : Le rang est au plus égal à 2. Il suffit d'extraire une matrice inversible appartenant à $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Par exemple $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$ donc rang $A = 2$.

(b) Est-ce que le système (S) peut admettre une solution unique ? Justifier soigneusement la réponse.

Une solution : Non, en effet rang $A +$ dim (Ker A) $= 3$, donc dim (Ker A) ≥ 1, donc il existe des vecteurs non nuls appartenant à Ker A. Si x_0 est un vecteur non nul appartenant à Ker A, si x vérifie $Ax = b$, alors $A(x + x_0) = b + 0 = b$, donc $x + x_0$ est une autre solution possible.

(c) Existe-t-il une solution à (S) pour tout b ?

Une solution : Oui, car rang $A = 2$ donc dim (Im A) $=$ dim $(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$.

De plus Im $A \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc Im $A = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ donc $\forall b \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), b \in$ Im A, donc $\forall b \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ il existe un x (au moins) tel que $Ax = b$.

(d) Résoudre maintenant le système (S) et donner toutes les solutions lorsqu'elles existent.

Une solution :

$\left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = b_1 \\ -3x_1 & +4x_2 & -x_3 & = b_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & = b_1 \\ & +x_2 & +2x_3 & = b_2 + 3b_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -2x_3 + b_2 + 3b_1 \\ x_1 = -3x_3 + b_2 + 4b_1 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow x = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 + 4b_1 \\ b_2 + 3b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Comme prévu, on obtient une infinité de solutions quel que soit b. Ces solutions s'écrivent comme la somme d'un vecteur de Ker A et d'une solution particulière de $Ax = b$.

(e) Montrer, sans calculs, que pour toute matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, il existe une matrice Y appartenant à $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que $AY = C$.

Une solution : D'après la question précédente, on a

$$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{M}_{2,1}, \ \exists Y_1, Y_2 \in \mathcal{M}_{3,1} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} AY_1 = C_1 \\ AY_2 = C_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow AY = C$$

Il existe donc $Y \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ solution de $AY = C$ (on détermine Y colonne par colonne).

(f) Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telles que $AY = I_2$.

Une solution : On détermine Y colonne par colonne en résolvant les systèmes :

$$AY_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, AY_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc d'appliquer les résultats de la question 1(d) avec ces deux seconds membres particuliers, on obtient :

$$Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \beta \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit P une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$, Q une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{qp}(\mathbb{R})$

(a) Quelle inclusion existe entre deux, parmi les trois, sous-espaces vectoriels suivants : Im P, Im Q et Im PQ ? Démontrer cette inclusion.
Une solution : Tout d'abord, notons que Im $P \subset \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R}), \text{Im } Q \subset \mathcal{M}_{q1}(\mathbb{R}), \text{Im } PQ \subset \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$.
Il ne peut donc exister aucune inclusion entre Im Q et l'un des 2 autres sous-espaces vectoriels.
On va démontrer que Im $PQ \subset$ Im P.
$Y \in \text{Im } PQ \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = PQX$.
Si on note $X' = QX$, alors $X' \in \mathcal{M}_{q1}(\mathbb{R})$ et $Y = PX'$, donc $Y \in$ Im P

(b) En déduire que rang $(PQ) \leq q$.
Une solution : D'après la question précédente, on a dim (Im PQ) $\leq$ dim (Im P).
Or, le rang de P est majoré par le nombre de ses colonnes c'est à dire q. Donc rang $(PQ) \leq q$.

(c) En déduire que, si $q < p$, il n'existe pas de matrice Q telle que $PQ = I_p$.
Une solution : Si $PQ = I_p$ alors ces 2 matrices ont le même rang, donc rang $PQ = p$.
Or rang $PQ \leq q < p$. Donc il n'est pas possible que $PQ = I_p$.

(d) Soit A une matrice quelconque appartenant à $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$.

i. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $X \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$ telle que $A^T X = I_3$.
Une solution : Il suffit d'utiliser la question précédente avec $q = 2$, $p = 3$, $P = A^T$ et $Q = X$.

ii. En déduire qu'il n'existe pas de matrice $Z \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$ telle que $ZA = I_3$.
Une solution : $ZA = I_3 \Leftrightarrow (ZA)^T = I_3 \Leftrightarrow A^T Z^T = I_3$.
On a démontré qu'il n'existe pas de $X \in \mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, tel que $A^T X = I_3$.
Il n'existe donc pas de $Z \in \mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$ tel que $A^T Z^T = I_3$ ou, ce qui est équivalent, $ZA = I_3$.

Quelques remarques supplémentaires au sujet de cet exercice 2 :
Si A est une matrice carrée appartenant à $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, et si A est inversible, alors il existe A' telle que $AA' = A'A = I_n$ et A' est l'inverse de A.
Maintenant, si A n'est pas carrée, par exemple $A \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{R})$ avec $q < p$, il n'est plus question de parler d'inverse. En revanche, on peut se demander s'il existe des matrices $A' \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ et $A'' \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ telles que $AA' = I_q$ et $A''A = I_p$.
On a démontré que A'' n'existait pas. On pourrait démontrer que si rang $A = q$, alors A' existe : on a fait la démonstration dans le cas particulier de la matrice A de la question 1.
Dans le cas $p < q$, A' n'existe pas. On pourrait démontrer que si rang $A = p$, alors A'' existe.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel de dimension p et F un espace vectoriel de dimension q.
Soit u une application linéaire de E dans F.

1. Soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_j$ des vecteurs de E. On définit les propositions :

$$(P) \quad (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_j) \text{ est une famille libre.}$$

$$(Q) \quad (u(\vec{x}_1), u(\vec{x}_2), ..., u(\vec{x}_j)) \text{ est une famille libre.}$$

Quelle implication vraie existe entre les propositions (P) et (Q) ? Démontrer le résultat.
Une solution : On a $(Q) \Rightarrow (P)$

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_j\vec{x}_j = \vec{0} &\Rightarrow u(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_j\vec{x}_j) = \vec{0} \quad \text{car } u(\vec{0}) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \alpha_1 u(\vec{x}_1) + \alpha_2 u(\vec{x}_2) + ... + \alpha_j u(\vec{x}_j) = \vec{0} \quad \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_j = 0 \quad \text{car } (u(\vec{x}_1), u(\vec{x}_2), ..., u(\vec{x}_j)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

2. On suppose que le rang de u vaut r avec

$$0 < r, \quad r < p, \quad r < q.$$

Soit $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_r\}$ une base de Im u.

(a) Montrer qu'il existe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r$ appartenant à E tels que

$$u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, \quad u(\vec{e}_2) = \vec{f}_2, \quad ... \quad , \quad u(\vec{e}_r) = \vec{f}_r \quad \text{et } (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r) \text{ libre.}$$

Une solution : Puisque $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_r)$ appartiennent à Im u, il existe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r$ appartenant à E tels que $u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, u(\vec{e}_2) = \vec{f}_2, ..., u(\vec{e}_r) = \vec{f}_r$.
De plus, en utilisant la question précédente, si $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), ..., u(\vec{e}_r))$ est une famille libre alors la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r)$ est libre.

(b) On note k la dimension de Ker u. Soit $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ une base de Ker u.
Montrer que $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est une famille libre.
Une solution :

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{e}_1 + ... + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{e'}_1 + ... + \beta_k\vec{e'}_k = \vec{0} &\Rightarrow u(\alpha_1\vec{e}_1 + ... + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{e'}_1 ... + \beta_k\vec{e'}_k) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \alpha_1 u(\vec{e}_1) + ... + \alpha_r u(\vec{e}_r) + \beta_1 u(\vec{e'}_1) ... + \beta_k u(\vec{e'}_k) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \alpha_1 u(\vec{e}_1) + ... + \alpha_r u(\vec{e}_r) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \alpha_1\vec{f}_1 + ... + \alpha_r\vec{f}_r = \vec{0} \\ &\Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0 \end{aligned}$$

On a utilisé successivement : $u(\vec{0}) = \vec{0}$; u est linéaire ; $\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_k \in$ Ker u ; $\{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_r\}$ base.
De plus

$$\begin{cases} \alpha_1\vec{e}_1 + ... + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{e'}_1 ... + \beta_k\vec{e'}_k = \vec{0} \\ \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1\vec{e'}_1 ... + \beta_k\vec{e'}_k = \vec{0} \Rightarrow \beta_1 = ... = \beta_k = 0$$

car $\{\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_k\}$ est une base (de Ker u).

(c) En déduire que $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est une base de E.
Une solution : La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est libre. De plus, elle contient $r + k$ vecteurs.
Or $r =$ dim Im u et $k =$ dim Ker u donc $r + k =$ dim $E = p$.
Cette famille libre de p vecteurs est donc une base de E.

3. (a) Montrer qu'il existe $\vec{f}_{r+1}, \vec{f}_{r+2}, ..., \vec{f}_q$ tels que $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_r, \vec{f}_{r+1}, ..., \vec{f}_q)$ soit une base de F.
Une solution : Il suffit d'utiliser le théorème de la base incomplète pour complèter la famille libre $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_r\}$ afin d'obtenir une base de F (qui est de dimension q).

(b) Déterminer la matrice A associée à u lorsque l'on munit E de la base $\mathcal{E}$ et F de la base $\mathcal{F}$. On pourra noter A par blocs dont on précisera la taille.
Une solution : On construit A colonne par colonne en écrivant les composantes de $u(\vec{e}_1), ..., u(\vec{e}_r), u(\vec{e'}_1), ..., u(\vec{e'}_r)$ dans la base $\vec{f}_1, ..., \vec{f}_r, \vec{f}_{r+1}, ..., \vec{f}_q$.
Comme $u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, \dots, u(\vec{e}_r) = \vec{f}_r$ et $(\vec{e'}_1, \dots, \vec{e'}_k) \in \mathrm{Ker}\ u$, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & ... & \ddots & ... & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & ... & ... & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{rk} \\ 0_{q'r} & 0_{q'k} \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} q' = q - r \\ I_r \text{matrice identité} \in \mathcal{M}_{rr} \\ 0_{rk} \text{matrice nulle} \in \mathcal{M}_{rk} \\ 0_{q'r} \text{matrice nulle} \in \mathcal{M}_{q'r} \\ 0_{q'k} \text{matrice nulle} \in \mathcal{M}_{q'k} \end{cases}$$