MT23 - A18 - Final - Corrigé

Exercice 1 - Partie I $\boxed{8.5}$ points

1. (b) i. $A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2-\lambda \end{pmatrix}$ λ est valeur propre donc rang $(A-\lambda I) < 3$

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc rang $(A-\lambda I) = 2$

(a) $\det(A-\lambda I) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_1 & -a_2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_2-\lambda \end{vmatrix}$

(0.5) $= -\lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$

d'où $\pi(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$.

(b) ii. $(A-\lambda I)Y = 0 \iff \begin{cases} \lambda y_1 - y_2 = 0 \\ \lambda y_2 - y_3 = 0 \\ a_0 y_1 + a_1 y_2 + (a_2+\lambda) y_3 = 0 \end{cases}$

(1) $\iff \begin{cases} y_2 = \lambda y_1 \\ y_3 = \lambda^2 y_1 \\ \underbrace{(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^3)}_{=\pi(\lambda)=0} y_1 = 0 \end{cases}$ $\iff Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$ $y_1 \neq 0$

$\hookrightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$

2. (a) $\forall \lambda_i$, $\dim V_{\lambda_i} = 3 - \text{rang}(A-\lambda_i I) = 1$ donc $\dim V_{\lambda_2} \neq \text{mult}(\lambda_2)$

(1) donc A n'est pas diagonalisable.

(b) i. $(A-\lambda_2 I)Y_1 = AY_1 - \lambda_2 Y_1 = (\lambda_1-\lambda_2)Y_1$

$(A-\lambda_2 I)Y_2 = 0$

(1) $(A-\lambda_2 I)Y_3 = Y_2$

d'où

$(A-\lambda_2 I)(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3) = (\lambda_1-\lambda_2)\alpha_1 Y_1 + \alpha_3 Y_2$

ii. $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)Y_1 + \alpha_3 Y_2 = 0$ d'après i.

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(\lambda_1-\lambda_2) = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$ car (Y_1, Y_2) libre (vecteurs propres associés à des valeurs propres $\neq$)

(1) $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$ car $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\Rightarrow \alpha_2 Y_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$ car $Y_2 \neq 0$

donc (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre

iii. $AP = PT \iff \begin{cases} AY_1 = PT_1 = t_{11} Y_1 \\ AY_2 = PT_2 = a Y_1 + t_{22} Y_2 \\ AY_3 = PT_3 = b Y_1 + c Y_2 + t_{33} Y_3 \end{cases}$ ou $u : X \mapsto AX$

(1.5) or $\begin{cases} AY_1 = \lambda_1 Y_1 \\ AY_2 = \lambda_2 Y_2 \\ AY_3 = Y_2 + \lambda_2 Y_3 \end{cases}$

donc $t_{11} = \lambda_1$ $t_{22} = t_{33} = \lambda_2$ $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$a = b = 0$ $c = 1$

3. (a) $\pi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$

$\pi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 8\lambda + 5$

$\pi''(\lambda) = 6\lambda - 8$

(0.5) On a bien $\pi(1) = \pi'(1) = 0$ et $\pi''(1) = -2 \neq 0$

donc 1 est valeur propre double

trace $(A) = 4 = 1 + 1 + 2$ donc $\lambda_1 = 2$ est valeur propre simple

(b) $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-I)Y_3 = Y_2 \iff \begin{cases} -y_1 + y_2 = 1 \\ -y_2 + y_3 = 1 \\ 2y_1 - 5y_2 + 3y_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_2 = 1 + y_1 \\ y_3 = 2 + y_1 \end{cases} \iff Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1

On choisit $Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Partie II $\boxed{4}$ points

1. On pose $\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) \\ x_3(t) = y''(t) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = 4x_3(t) - 5x_2(t) + 2x_1(t) \end{cases}$

1.5 d'où

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} x$$

2. $\begin{cases} z_1'(t) = 2z_1(t) & (1) \\ z_2'(t) = z_2(t) + z_3(t) & (2) \\ z_3'(t) = z_3(t) & (3) \end{cases}$

(1) : $z_1(t) = C_1 e^{2t}$

(3) : $z_3(t) = C_3 e^t$

1.5 (2) $\iff z_2'(t) = z_2(t) + C_3 e^t$

- solution homogène : $z_{2h}(t) = C_2 e^t$
- solution particulière : $z_{2p}(t) = Ate^t$
  $z_{2p}' = (A + At)e^t$

(2) $\Rightarrow A + At = At + C_3$ i.e. $A = C_3$ et $z_{2p}(t) = C_3 t e^t$

d'où $z_2(t) = (C_2 + C_3 t)e^t$

3. On a $x' = Ax$ et on sait d'après la Partie I que $A = PTP^{-1}$

$$x' = Ax \iff x' = PTP^{-1}x \iff P^{-1}x' = TP^{-1}x \iff \begin{cases} z' = Tz \\ z = P^{-1}x \end{cases}$$

1 D'où $x = Pz \iff x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} z$

$y(t) = x_1(t) = z_1(t) + z_2(t)$ donc $y(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t)e^t$

Exercice 2 $\boxed{7.5}$ points

1\. (a) $B^T = (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T = B$ donc B est symétrique

(1) $x^T B x = x^T A A^T x = (A^T x)^T (A^T x) = y^T y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0 \quad \forall x$ donc B déf. ≥ 0

(b) $x^T B x = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 0 \iff y = 0 \iff A^T x = 0$

(1) Pour avoir $A^T x = 0 \iff x = 0$ il faut A^T inversible $\iff A$ inversible ou $\iff$ rang $A = n$

2\. (a) f déf. $> 0 \iff B$ déf. > 0
$\iff A$ inversible d'après 1(b)

(1) Or rang $A < 3$ (car une colonne nulle) donc A non inversible et f n'est pas déf. > 0.

$\boxed{\text{ou}}$ Calcul de B puis réduction de Gauss (*)

(b) $$B = AA^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4+\alpha \end{pmatrix}$$

Pour que g soit un produit scalaire, elle doit être : (Pas nécessaire de calculer B et C)
- symétrique : OK car C l'est
- déf. > 0 : à étudier.

$\boxed{\text{ou}}$ Réduction de Gauss après calcul de C (**)

(1.5)
$$\begin{aligned} g(x,x) &= x^T C x = x^T (AA^T + E) x \\ &= x^T A A^T x + x^T E x \\ &= (A^T x)^T (A x) + \alpha x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - 2x_3)^2 + \alpha x_3^2 \end{aligned} \qquad A^T x = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 + x_2 \\ -2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha > 0$, $g(x,x) \geq 0 \quad \forall x$ (somme de carrés)
$$g(x,x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff x = 0$$
donc g déf. > 0.

Si $\alpha \leq 0$, $g(1,1,1) = \alpha \leq 0$ donc g pas déf. > 0

Donc g définit un produit scalaire $\iff \alpha > 0$.

(c) $F \oplus F^\perp = \mathcal{M}_{n,1}$ donc $\dim F^\perp = n - \dim F = n - 1$

(1.5) $y \in F^\perp \iff g(y, e_1) = 0 \iff y^T C e_1 = 0 \iff y^T C_1 = 0 \iff y_1 - y_2 = 0$
$$\iff y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs sont générateurs de $F^\perp$ et non colinéaires donc libre : c'est une base

3\. (a) i. $$F = (f_1 \cdots f_n) = \Big(\underbrace{\tfrac{f_1}{d_1} \cdots \tfrac{f_n}{d_n}}_{\text{colonnes orthonormées}}\Big) \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = HD$$

(0.5)

ii. H est orthogonale donc inversible

(0.5) $f_i \neq 0 \Rightarrow d_i \neq 0$ donc $\det D = \prod_{i=1}^{n} d_i \neq 0$ et D est inversible

iii. $F^{-1} = (HD)^{-1} = D^{-1} H^{-1} = D^{-1} H^T$ (1)

$F^T = (HD)^T = D^T H^T = D H^T$ (2)

(0.5) (1) $\iff H^T = D F^{-1}$ d'où (2) $\iff F^T = D(DH^T) = D^2 H^T$

*

$$\begin{aligned} f(x,x) &= x^T B x \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2 - 8x_2x_3 + 4x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - 2x_3)^2 \end{aligned}$$

Si $x = (1,1,0)$, $f(x,x) = 0$ donc f n'est pas déf. > 0 .

**

$$\begin{aligned} g(x,x) &= x^T C x \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + (4+\alpha)\, x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (2x_2 - 2x_3)^2 + \alpha x_3^2 \end{aligned}$$