MT23-P2013 Test 1 : CORRIGÉ

Durée : 45mn.

Exercice 1 *(barème approximatif : 2 points)*

Soit E et F deux espaces vectoriels sur K et u une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$. Soit $(\vec{v}_i)_{i=1,\dots,p}$ une famille de $p>0$ vecteurs de E.

1. *Donner la définition du fait que la famille $(\vec{v}_i)_{i=1,\dots,p}$ est génératrice de E.*

   Cf. cours : la famille $(\vec{v}_i)_{i=1,\dots,p}$ est génératrice de E, si $\forall i=1,\dots,p\ \vec{v}_i \in E$ et

$$\forall i=1,\dots,p\ \vec{v}_i \in E \text{ et}$$
$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i=1,\dots,p} \in \mathbb{R}^p \text{ tels que } \vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v}_i.$$

2. *On suppose que u est surjective. Montrer que si $(\vec{v}_i)_{i=1,\dots,p}$ est génératrice de E, alors $(u(\vec{v}_i))_{i=1,\dots,p}$ est génératrice de F.*

   Cf. Prop. II.1.4 : Notons déjà que pour tout $i=1,\dots,p$, les $u(\vec{v}_i)$ appartiennent à F.

   Soit $\vec{y}$ dans F. u est surjective, donc il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$. Comme $(\vec{v}_i)_{i=1,\dots,p}$ est génératrice de E, il existe p scalaires $(\lambda_i)_{i=1,\dots,p}$ tels que : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{v}_i$. Par linéarité de u, il vient : $\vec{y} = u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(\vec{v}_i)$. Donc $(u(\vec{v}_i))_{i=1,\dots,p}$ est génératrice de F.

Exercice 2 *(barème approximatif : 3 points)*

Soit $F = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$.

1. *Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

   On montre aisément que :
   - $F \neq \emptyset$, car $0 \in F$ car $0-0+0-0=0$ et $0+0+0=0$.
   - Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans F, on pose $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^4$. On a $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = (x_1+y_1) - (x_2+y_2) + (x_3+y_3) - (x_4+y_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4) = 0+0 = 0$. De même $z_2 + z_3 + z_4 = (x_2+x_3+x_4) + (y_2+y_3+y_4) = 0+0 = 0$. Donc $\vec{x}+\vec{y} \in F$.
   - Soit $\vec{x}$ dans F et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\vec{v} = \lambda.\vec{x} \in \mathbb{R}^4$. On a $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = \lambda(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) = \lambda 0 = 0$ et $v_2 + v_3 + v_4 = \lambda(x_2+x_3+x_4) = \lambda 0 = 0$. Donc $\lambda.\vec{x} \in F$.

2. *Donner une base $\{\vec{f_1},\dots,\vec{f_k}\}$ de F et la dimension de F.*

   On remarque déjà que nécessairement $k \leq 4$ car $\dim F \leq \dim \mathbb{R}^4 = 4$.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in F &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &=& 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& -2x_3 \\ x_2 &=& -x_3 - x_4 \end{array}\right. \\
&\iff \vec{x} = x_3(-2\,,-1\,,1\,,0) + x_4(0\,,-1\,,0\,,1) \\
&\iff \vec{x} \in \text{Vect}\left\langle \vec{f_1}; \vec{f_2} \right\rangle,\ \text{où} \\
&\qquad \vec{f_1} = (-2\,,-1\,,1\,,0) \text{ et } \vec{f_2} = (0\,,-1\,,0\,,1).
\end{aligned}$$

   On vérifie que $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ appartiennent bien à F. Ceci montre que $(\vec{f_1},\vec{f_2})$ est génératrice de F.

   On vérifie que $(\vec{f_1},\vec{f_2})$ est libre : soit λ_1, λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1\vec{f_1} + \lambda_2\vec{f_2} = 0$. Les deux dernières équations impliquent immédiatement que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

   On en déduit que $(\vec{f_1},\vec{f_2})$ est une base de F et que $\dim F = 2$.

3. *Soit $\vec{g}_1 = (0,0,1,0)$ et $\vec{g}_2 = (0,0,0,1)$. Montrer que $\{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k\} \cup \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*
Comme $\mathcal{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} \cup \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ contient 4 éléments et que la dimension de $\mathbb{R}^4$ est 4, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre, ou que $\mathcal{B}$ est génératrice (**cf. Prop I.2.7**). Montrons que $\mathcal{B}$ est libre : soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{g}_1 + \lambda_4 \vec{g}_2 = 0$. Ceci implique que :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda_1 &=& 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 &=& 0 \end{array} \right.$$
Ceci implique que $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$. Donc $\mathcal{B}$ est libre, c'est une base.

Exercice 3 : *(barème approximatif : 5 points) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.*

1. (a) *Donner la définition de $F + G$.*
$$F + G = \left\{ \vec{x} \in E \mid \exists \vec{f} \in F \text{ et } \exists \vec{g} \in G \text{ tels que } \vec{x} = \vec{f} + \vec{g} \right\}.$$
   (b) *Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
   On montre que :
   – $F \cap G \neq \emptyset$, car $0 \in F$ et $0 \in G$, car ce sont des sous espaces vectoriels.
   – Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $F \cap G$, soit λ et μ dans $\mathbb{R}$. Comme F est un sous espace vectoriel et que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dans F, $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F$. De même pour G, donc $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ est aussi dans G. Donc $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in F \cap G$.
2. *On suppose que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Soit $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_p\}$ une base de F et soit $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_q\}$ une base de G.*

   (a) *Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_p\} \cup \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_q\}$ est une base de $F \oplus G$.*
   Remarquons d'abord que F et G sont bien en somme directe car on a supposé que $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
   Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $F \oplus G$: tout d'abord, remarquons que les $\vec{f}_i$ et les $\vec{g}_j$ appartiennent bien à $F \oplus G$, car $\vec{f}_i = \vec{f}_i + 0 \in F \oplus G$ (de même pour les $\vec{g}_j$). Ensuite, soit $\vec{x} \in F \oplus G$, donc il existe $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$ tels que $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$ (ils sont même uniques, car la somme est directe). Comme $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_p\}$ est une base de F (donc génératrice de F), il existe p scalaires α_i tels que $\vec{f} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i$. De même, il existe q scalaires β_i tels que $\vec{g} = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{g}_j$ Il vient donc : $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{g}_j \in \text{Vect}\langle\mathcal{B}\rangle$, donc $\mathcal{B}$ est génératrice de $F \oplus G$.
   Montrons que $\mathcal{B}$ est libre : soit p scalaires $(\alpha_i)_{i=1,\ldots,p}$ et q scalaires $(\beta_i)_{i=1,\ldots,q}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{g}_j = 0$. Ceci implique que $\vec{y} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i = -\sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{g}_j$, donc $\vec{y}$ est dans F et dans G. Comme $F \cap G = \{\vec{0}\}$, ceci implique que $\vec{y}$ est nul, donc $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{f}_i = 0$, ce qui implique que tous les α_i sont nuls car $\mathcal{F}$ est libre. De même, $\sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{g}_j = 0$, ce qui montre que les β_j sont nuls car $\mathcal{G}$ est libre.
   Conclusion : $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_p\} \cup \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_q\}$ est une base de $F \oplus G$.

   (b) *En déduire la relation qui relie les dimensions de $F \oplus G$, de F et de G.*
   D'après la question précédente :
$$\dim(F \oplus G) = p + q = \dim F + \dim G. \tag{1}$$
3. *On ne suppose* plus *que $F \cap G$ est égal à $\{\vec{0}\}$. On appelle A un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (c'est-à-dire que $F = A \oplus (F \cap G)$).*

(a) *Montrer que* $A \cap G = \{\vec{0}\}$.

Soit $\vec{x} \in A \cap G$. $\vec{x}$ est dans $A \subset F$ et est dans G, donc $\vec{x}$ est dans $F \cap G$. Mais cela signifie que $\vec{x}$ est dans A et dans $F \cap G$, dont l'intersection est réduite à $\{\vec{0}\}$ (car A et $F \cap G$ sont en somme directe). Donc $\vec{x} = 0$.

Conclusion $A \cap G = \{\vec{0}\}$.

(b) *Montrer que* $F + G = A + G$.

On travaille par double inclusion.

Montrons d'abord que $F + G \subset A + G$. Soit $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$ dans $F + G$ (où $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$). Comme $F = A \oplus (F \cap G)$, cela signifie qu'il existe $\vec{a} \in A$ et $\vec{h} \in F \cap G$ tels que $\vec{f} = \vec{a} + \vec{h}$. Donc $\vec{x} = (\vec{a} + \vec{h}) + \vec{g} = \vec{a} + (\vec{h} + \vec{g}) \in A + G$, car $\vec{h}$ et $\vec{g}$ sont dans G.

Montrons maintenant que $A + G \subset F + G$. Soit $\vec{x} = \vec{a} + \vec{g} \in A + G$ (où $\vec{a} \in A$ et $\vec{g} \in G$). Comme $A \subset F$, donc $\vec{x} = \vec{a} + \vec{g} \in F + G$.

(c) *Déduire du fait que* $F = A \oplus (F \cap G)$ *et que* $F + G = A \oplus G$ *la relation qui relie les dimensions de* $F + G$*, de* F*, de* G *et de* $F \cap G$*.*

On a montré aux questions **??**) et **??**) que $F + G = A \oplus G$. D'après l'équation (**??**), on en déduit que $\dim(F + G) = \dim A + \dim G$.

De plus, comme $F = A \oplus (F \cap G)$, on a $\dim F = \dim A + \dim(F \cap G)$, donc $\dim A = \dim F - \dim(F \cap G)$. On obtient finalement :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G). \tag{2}$$