MT23 - A2023 - Test 1

NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (; ;). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et on note (p_0, p_1, p_2) sa base canonique (on rappelle que $p_k(t) = t^k$, $\forall t \in \mathbb{R}$ et $k = 0, 1$ ou 2).

Soit $F = \{p \in \mathcal{P}_2 / p(0) = 0\}$ et $G = \{p \in \mathcal{P}_2 / p' = 0_{\mathcal{P}_2}\}$ (où p' désigne la dérivée de p et $0_{\mathcal{P}_2}$ le polynôme nul de $\mathcal{P}_2$).

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_2$.
2. Déterminer une base et la dimension de F et G.
3. Montrer que $F \oplus G = \mathcal{P}_2$.

Correction.

1. (a) — $0_{\mathcal{P}_2} \in F$ donc $F \neq \emptyset$.
   — Soient p et $q \in F$, $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0$ donc $p + q \in F$.
   — Pour tout $p \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda p)(0) = \lambda p(0) = 0$ donc $\lambda p \in F$.

   En conclusion F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_2$.

   (b) — $0_{\mathcal{P}_2} \in G$ donc $G \neq \emptyset$.
   — Pour tout p et $q \in G$, $(p+q)' = p' + q' = 0_{\mathcal{P}_2}$ donc $p + q \in G$.
   — Pour tout $p \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda p)' = \lambda p' = 0_{\mathcal{P}_2}$ donc $\lambda p \in G$.

   Ainsi, on en déduit que G est également un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_2$.

2. (a) Soit $p \in F$ alors p admet la décomposition suivante dans la base canonique de $\mathcal{P}_2$:

$$p = a_2 p_2 + a_1 p_1 + a_0 p_0, \quad \text{avec } a_2, a_1 \text{ et } a_0 \in \mathbb{R}.$$

   On a donc

$$p \in F \;\Leftrightarrow\; p(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; a_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; p = a_2 p_2 + a_1 p_1.$$

   p_1 et $p_2 \in F$, donc on en déduit que $F = \text{vect}\langle p_1, p_2\rangle$. La famille (p_1, p_2) étant une sous-famille de la famille (p_0, p_1, p_2) qui est libre alors (p_1, p_2) est une famille libre. On en conclut que (p_1, p_2) est une base de F et que $\dim(F) = 2$.

   (b) Soit à présent $q \in G$ alors q admet la décomposition suivante dans la base canonique de $\mathcal{P}_2$:

$$q = b_2 p_2 + b_1 p_1 + b_0 p_0, \quad \text{avec } b_2, b_1 \text{ et } b_0 \in \mathbb{R}.$$

   On a donc

$$q \in G \;\Leftrightarrow\; q' = 0_{\mathcal{P}_2} \;\Leftrightarrow\; b_2 p_2' + b_1 p_1' + b_0 p_0' = 0_{\mathcal{P}_2} \;\Leftrightarrow\; b_2 p_1 + b_1 p_0 = 0_{\mathcal{P}_2}.$$

   La famille (p_0, p_1) étant libre alors $b_2 = b_1 = 0$. D'où

$$q \in G \;\Leftrightarrow\; q = b_0 p_0.$$

   $p_0 \in G$ donc $G = \text{vect}\langle p_0\rangle$ et comme $p_0 \neq 0_{\mathcal{P}_2}$ alors la famille p_0 est libre. Ainsi p_0 est une base de G et $\dim(G) = 1$.

3. D'après la question précédente on a $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathcal{P}_2)$.
Il nous reste à montrer que $F \cap G = \{0_{\mathcal{P}_2}\}$:
De plus soit $p \in F \cap G$ alors il existe a_2, a_1 et $a_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$p \in F \cap G \iff \begin{cases} p = a_2p_2 + a_1p_1 + a_0p_0 \\ p \in F \\ p \in G \end{cases} \iff \begin{cases} p = a_2p_2 + a_1p_1 + a_0p_0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = a_2 = 0 \end{cases} \iff p = 0_{\mathcal{P}_2},$$

On a bien $F \cap G = \{0_{\mathcal{P}_2}\}$ et donc $F \oplus G = \mathcal{P}_2$.

Exercice 2 Soient $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 2, 0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2 + 3x_3, x_1 + 3x_2) \qquad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que u est une application linéaire.
3. Montrer que $(u(v_1), u(v_2), u(v_3))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.
4. Que peut-on en déduire sur u ?

1. On considère λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned} \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 = 0 &\iff \begin{cases} \lambda_1 & -\lambda_2 & & = 0 \\ \lambda_1 & & +2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 & -\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \\ & 2\lambda_2 & & = 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille (v_1, v_2, v_3) est libre et forme bien une base de $\mathbb{R}^3$ car cette famille libre est constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} u(x + y) &= ((x_1 + y_1) + (x_3 + y_3), 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3), (x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_3, 2x_2 + 3x_3, x_1 + 3x_2) + (y_1 + y_3, 2y_2 + 3y_3, y_1 + 3y_2) = u(x) + u(y). \end{aligned}$$

De plus, soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$u(\lambda x) = (\lambda x_1 + \lambda x_3, 2\lambda x_2 + 3\lambda x_3, \lambda x_1 + 3\lambda x_2) = \lambda(x_1 + x_3, 2x_2 + 3x_3, x_1 + 3x_2) = \lambda u(x).$$

En conclusion, u est bien linéaire.

3. Comme (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ et que u est linéaire alors ,d'après le cours, la famille $(u(v_1), u(v_2), u(v_3))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. De plus on a

$$\begin{aligned} u(v_1) &= (2, 5, 4), \\ u(v_2) &= (0, 3, -1), \\ u(v_3) &= (0, 4, 6). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que la famille $(u(v_1), u(v_2), u(v_3))$ est libre. Pour ce faire, on considère λ_1, λ_2 et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned}\lambda_1 u(v_1) + \lambda_2 u(v_2) + \lambda_3 u(v_3) = 0 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} 2\lambda_1 & & & = 0 \\ 5\lambda_1 & +3\lambda_2 & +4\lambda_3 & = 0 \\ 4\lambda_1 & -\lambda_2 & +6\lambda_3 & = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llll} \lambda_1 & & & = 0 \\ & & 22\lambda_3 & = 0 \\ & -\lambda_2 & +6\lambda_3 & = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\end{aligned}$$

Donc la famille $(u(v_1), u(v_2), u(v_3))$ est libre. En conclusion la famille $(u(v_1), u(v_2), u(v_3))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

4. D'après la question précédente $\dim(\operatorname{Im} u) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^3$. Ainsi u est surjective.

Exercice 3 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2 + x_3) \qquad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Sans calcul, dire si u peut être bijective.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. u est-elle injective ?
4. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (à savoir $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$) et (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (à savoir $f_1 = (1,0)$ et $f_2 = (0,1)$). Ecrire la matrice A représentant l'application u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment A est construite).

1. Si u est bijective alors l'image par u de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Or $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ ne peut être une base de $\mathbb{R}^2$ car elle contient 3 vecteurs et $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. $\boxed{\text{ou}}$ Si u est bijective alors $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes et donc $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}^2$, ce qui est impossible.
   Ainsi u ne peut pas être bijective.
2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}x \in \operatorname{Ker} u \Leftrightarrow u(x) = 0 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 & = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_2 & = -2x_1 \\ x_3 & = -3x_1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow x = (x_1, -2x_1, 3x_1) = x_1 \underbrace{(1, -2, -3)}_{=v}.\end{aligned}$$

   $v \in \operatorname{Ker} u$ donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{vect}\langle v \rangle$. De plus le vecteur v n'est pas le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ donc la famille (v) est libre et forme donc une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. Comme $\operatorname{Ker} u \neq \{(0,0,0)\}$ alors u ne peut être injective.
4. Pour déterminer A on s'intéresse aux vecteurs

$$u(e_1) = (2,1) = 2f_1 + f_2, \quad u(e_2) = (1,-1) = f_1 - f_2, \quad u(e_3) = (0,1) = f_2.$$

Ainsi on obtient l'expression suivante pour la matrice A

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \end{array}$$