MT23 - A2020 - Final

Durée 1h30.
Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice ou partie sur une copie séparée.
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barême approximatif : 14,5 points)*

Partie I - CHANGER DE COPIE

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang des matrices suivantes : $(A - I)$, $(A - 2I)$ et $(A - 2I)^2$. Bien justifier les réponses.
2. En déduire toutes les valeurs propres de A et leur multiplicité (sans calculer le polynôme caractéristique).
3. Sans calculer les vecteurs propres, dire si A est diagonalisable.
4. (a) Sans calculer le polynôme caractéristique, donner le coefficient de λ^3. En déduire alors sa forme factorisée.
   (b) Calculer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
5. Dans cette question, vous ne devez à aucun moment calculer les vecteurs y_1, y_2 et y_3.
   (a) Montrer qu'il existe y_3 tel que $y_3 \in \text{Ker } (A - 2I)^2$ mais $y_3 \notin \text{Ker } (A - 2I)$.
   (b) En déduire que $(A - 2I)y_3 = y_2$, où y_2 est un vecteur propre (préciser la valeur propre associée).
   (c) Soit $y_1 \in \text{Ker } (A-I)$ non nul et y_2 et y_3 les vecteurs définis à la question précédente, montrer que la famille (y_1, y_2, y_3) est une base de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.
   (d) En déduire que $A = PTP^{-1}$ où
   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
   On déterminera a, b et c et on justifiera l'existence de la matrice inversible P.
6. Calculer les vecteurs y_1, y_2 et y_3 (on les choisira de telle sorte que la deuxième composante de chaque vecteur soit égale à 1).

Partie II - CHANGER DE COPIE

On veut résoudre le système d'équations différentielles linéaires

$$(I) \quad x'(t) = Ax(t)$$

1. Montrer que (I) peut se mettre sous la forme
   $$(II) \quad z'(t) = Tz(t).$$
2. Résoudre (II).
3. On pose $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calculer $z(0)$ puis $z(t)$.
4. En déduire la solution $x(t)$ de (I).

TSVP

Exercice 2 (*barême approximatif : 7,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $< .,. >$ le produit scalaire usuel et $||.||$ la norme associée.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.
   (a) Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}^3, \ \ ||Ay|| = ||y||$.
   (b) En déduire que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $|\lambda| = 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, symétrique, vérifiant $\det A = -1$.
   (a) Si -1 est valeur propre triple de A, que vaut A ?
   (b) On suppose que $A \neq -I$, donner les valeurs propres de A et préciser leur multiplicité. On justifiera très clairement la réponse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Sans calcul, dire si A est définie positive.
   (b) Déterminer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que
   $$A = PDP^{-1}.$$
   (c) Soit la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ $q(x) = x^T Ax$. Utiliser la question précédente pour décomposer q en somme de carrés.