MT23 - A2021 - Final

Durée 1h30.
Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice ou partie sur une copie séparée.
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 14,5 points)*

Partie I - CHANGER DE COPIE
Les questions 1, 2 et 4 sont indépendantes.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer le rang des matrices $(A - I)$ et $(A - I)^2$.
   (b) Calculer $\det A$ et rappeler son lien avec les valeurs propres.
   (c) En déduire toutes les valeurs propres de A, leur multiplicité et la dimension du sous-espace propre associé.
   (d) Déterminer les vecteurs propres.
2. Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$, calculer x_1 et x_2 tels que le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $(A - I)x = b$.
   On précisera la relation vérifiée par b_1, b_3 et b_4 dans ce cas.
3. Montrer que si Z est un vecteur tel que $(A - I)Z \neq 0$ alors $Y = (A - I)Z$ est un vecteur propre de A.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$ une matrice non inversible.
   On suppose que Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 sont des vecteurs qui vérifient :
   $$MY_1 = 0,\ MY_2 = 0,\ MZ_1 = Y_1,\ MZ_2 = Y_2,\ (Y_1, Y_2) \text{ est une famille libre .}$$
   Montrer que (Y_1, Z_1, Y_2, Z_2) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
5. Utiliser les questions précédentes, avec un choix judicieux pour M, pour montrer qu'il existe P inversible, vérifiant $AP = PT$ avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Utiliser toutes les questions précédentes pour démontrer que l'on peut choisir
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
7. Résoudre $Px = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie II - CHANGER DE COPIE

On veut résoudre le système d'équations différentielles linéaires

$$(I) \quad x'(t) = Ax(t)$$

1. Montrer que (I) est équivalent à
$$(II) \quad z'(t) = Tz(t).$$
2. Résoudre (II).
3. On pose $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, en déduire $z(0)$ puis $z(t)$.
4. En déduire la solution $x(t)$ de (I).

Exercice 2 (*barême approximatif : 6,5 points*) CHANGER DE COPIE

1. Soit E un espace euclidien dont on note $< .,. >$ le produit scalaire.
   Soit F un sous-espace vectoriel de E, muni d'une base $(f_1, f_2, ..., f_p)$.
   On note $F^\perp$ l'orthogonal de F dans E.
   Montrer que :
   $$y \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i = 1, ..., p, \quad < y, f_i >= 0.$$
   (indication : on pourra raisonner par double implication)
2. On définit
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & \alpha \end{pmatrix}.$$
   A quelle condition nécessaire et suffisante sur le paramètre réel α, la matrice A est-elle définie positive ? Bien justifier la réponse.
   (indication : on pourra faire une réduction de Gauss)
3. On suppose que la condition précédente sur α est réalisée. On note $E = \mathbb{R}^3$. On munit E du produit scalaire $< x, y >= x^T Ay$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Que valent $< e_1, e_3 >$ et $< e_2, e_3 >$? Que peut-on en déduire ?
   (b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille (e_1, e_2), déterminer une base de $F^\perp$.