MT23 - A2021 - Examen médian

Durée 1h30.
Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice et/ou partie sur une copie séparée.
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 6,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u(\vec{x}) = (2x_1 + x_2 + 2x_3,\ 2x_2 + x_3,\ -x_2)$.

1. Etudier l'injectivité et la bijectivité de u.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{e_1},\ \vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}, \vec{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. En justifiant soigneusement, donner la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ et, sans calcul supplémentaire, dire si elle est inversible ou non.
4. Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.
5. En déduire la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Sans calcul supplémentaire
   (a) Donner l'image par u des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$.
   (b) En déduire des valeurs propres et vecteurs propres de u.

Exercice 2 (*barème approximatif : 8 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. (a) Quel est le rang de B ?
   (b) En déduire dim (Ker B).
   (c) En déduire une valeur propre de A.
   (d) Calculer dim (Ker B^2) de façon analogue.
2. (a) Montrer que Ker $B \subset$ Ker B^2 et que l'inclusion est stricte.
   (b) Montrer que Im $B^2 \subset$ Im B et que l'inclusion est stricte.
   (c) Donner une base de Im B^2 et Ker B^2.
   (d) Montrer que Im B^2 et Ker B^2 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

TSVP

Exercice 3 (*barème approximatif : 6,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

1. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, quelle est la définition de $b \in \text{Im } A$? De quel espace vectoriel Im A est-il un sous-espace vectoriel ?

   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $b \in \text{Im } A$, on cherche $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ vérifiant $Ax = b$. Démontrer que
   $$Ax = b \text{ admet une solution unique } \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\}.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}, b \in \mathcal{M}_{4,1}$, on cherche $x \in \mathcal{M}_{3,1}$ vérifiant $Ax = b$.

   (a) Existe-t-il des matrices A pour lesquelles il existe une solution quel que soit b ? Justifier soigneusement la réponse.

   (b) Compléter et démontrer l'équivalence suivante :
   $$Ax = b \text{ admet une solution unique } \Leftrightarrow b\text{....... et rang } A\text{.......}$$

   (c) Compléter et démontrer l'équivalence suivante :
   $$Ax = b \text{ admet une infinité de solutions } \Leftrightarrow b\text{....... et rang } A\text{.......}$$

3. On choisit
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Résoudre $Ax = 0$.

   (b) Sans aucun calcul supplémentaire, existe-t-il un vecteur b pour lequel il existe une infinité de solutions ? Si oui, donnez un tel vecteur b.

   (c) Sans aucun calcul supplémentaire, existe-t-il un vecteur b pour lequel il existe une solution unique ? Si oui, donnez un tel vecteur b.