MT23 - A2021 - Test 1

NOM :

PRENOM : Correction

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (3,5 ; 2,5 ; 4,5). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on pose

$$F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 0\}.$$

1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Donner une base et la dimension de F_1.
3. On pose $F_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 - x_2 = 0\}$.
   Montrer que $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^2$.

Correction :

1. • $\vec{0} = (0,0) \in F_1$ donc $F_1 \neq \emptyset$

• Soit $\vec{x}, \vec{y} \in F_1$, $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$(x_1+y_1) + (x_2+y_2) = \underbrace{(x_1+x_2)}_{=0 \text{ car } \vec{x} \in F_1} + \underbrace{(y_1+y_2)}_{=0 \text{ car } \vec{y} \in F_1} = 0+0=0$ donc $\vec{x}+\vec{y} \in F_1$

• Soit $\vec{x} \in F_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

$(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda \underbrace{(x_1+x_2)}_{=0 \text{ car } \vec{x} \in F_1} = \lambda.0 = 0$ donc $\lambda.\vec{x} \in F_1$

Donc F_1 est un s.e.v. de $\mathbb{R}2$

2. $\vec{x} \in F_1 \iff \vec{x} = (x_1, x_2)$ et $x_1 + x_2 = 0$

$\iff \vec{x} = (x_1, x_2)$ et $x_2 = -x_1$

$\iff \vec{x} = (x_1, -x_1) = x_1 \underbrace{(1,-1)}_{\in F_1}$ donc $F_1 = \text{vect}\langle (1,-1) \rangle$

Un vecteur non nul forme toujours une famille libre
donc $((1,-1))$ est une base de F_1 et $\dim F_1 = 1$

3. $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^2 \iff \begin{cases} F_1 + F_2 = \mathbb{R}^2 & (1) \\ F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \dim F_1 + \dim F_2 = \dim \mathbb{R}2 \\ F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\} & (2) \end{cases}$

• $\vec{x} \in F_1 \cap F_2 \iff \vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

$\iff \vec{x} = (x_1, x_2)$ et $x_1 = x_2 = 0$ donc $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$

$\iff \vec{x} = \vec{0}$

(1) On cherche a et b tq $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \underbrace{(a,-a)}_{\in F_1} + \underbrace{(b,b)}_{\in F_2}$

Par identification, on trouve $a = \frac{x_1 - x_2}{2}$ et $b = \frac{x_1 + x_2}{2}$

donc $\mathbb{R}^2 \in F_1 + F_2$

$F_1 + F_2 \subset \mathbb{R}^2$ par définition donc $\mathbb{R}^2 = F_1 + F_2$

$\boxed{\text{ou}}$ ② $\vec{x} \in F_2 \iff \vec{x} = (x_1, x_2)$ et $x_1 - x_2 = 0$

$\iff \vec{x} = (x_1, x_2)$ et $x_1 = x_2$ donc $F_2 = \text{Vect}\langle(1,1)\rangle$

$\iff \vec{x} = (x_1, x_1) = x_1 \underbrace{(1,1)}_{\in F_2}$

Un vecteur non nul forme une famille libre

donc $((1,1))$ est une base de F_2 et $\dim F_2 = 1$

D'où $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

Exercice 2 Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille de vecteurs de E. On donne les 2 propositions suivantes :

(1) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ famille libre de $E \Rightarrow (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \ldots, u(\vec{e}_n))$ famille libre de F

(2) $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \ldots, u(\vec{e}_n))$ famille libre de $F \Rightarrow (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ famille libre de E

1. Quelle proposition est toujours vraie ? La démontrer.
2. A quelle condition l'autre proposition est-elle vraie ? La démontrer sous cette condition.

Correction :

1. (2) est toujours vraie.

En effet, $\lambda \vec{e_1} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}_E$

$\Rightarrow u(\lambda_1 \vec{e_1} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n}) = u(\vec{0}_E)$

$\Rightarrow \lambda_1 u(\vec{e_1}) + \ldots + \lambda_n u(\vec{e_n}) = \vec{0}_F$ car u est linéaire

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $(u(\vec{e_1}), \ldots, u(\vec{e_n}))$ libre

Donc $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est une famille libre

2. (1) est vraie si u est injective.

En effet, $\lambda_1 u(\vec{e_1}) + \ldots + \lambda_n u(\vec{e_n}) = \vec{0}_F$

$\Rightarrow u(\lambda_1 \vec{e_1} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n}) = \vec{0}_F$ car u est linéaire

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{e_1} + \ldots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0}_E$ car u est injective $(\mathrm{Ker}\, u = \{\vec{0}_E\})$

$\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ car $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ est libre

Donc $(u(\vec{e_1}), \ldots, u(\vec{e_n}))$ est une famille libre

Exercice 3 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Calculer $\operatorname{Ker} u$ (en donner une base et la dimension).
3. Calculer $\operatorname{Im} u$ (en donner une base et la dimension).
4. u est-elle injective ? surjective ?
5. Ecrire la matrice A de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment elle est construite).

Correction :

1. $u(\vec{x}+\vec{y}) = ((x_1+y_1)+(x_2+y_2), x_3+y_3)$

$= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), x_3+y_3)$

$= (x_1+x_2, x_3) + (y_1+y_2, y_3)$

$= u(\vec{x}) + u(\vec{y})$

$u(\lambda\vec{x}) = ((\lambda x_1)+(\lambda x_2), \lambda x_3)$

$= (\lambda(x_1+x_2), \lambda x_3)$

$= \lambda(x_1+x_2, x_3)$

$= \lambda u(\vec{x})$

donc u est linéaire

2. $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \iff \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ et $u(\vec{x}) = (0,0)$

$\iff \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$

$\iff \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ et $\begin{cases} x_2=-x_1 \\ x_3=0 \end{cases}$

$\iff \vec{x} = (x_1, -x_1, 0) = x_1 \underbrace{(1,-1,0)}_{\in \operatorname{Ker} u}$

donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{vect}\langle (1,-1,0) \rangle$

Un vecteur non nul est une famille libre donc $((1,-1,0))$ est une base de $\operatorname{Ker} u$ et $\dim \operatorname{Ker} u = 1$.

3. $\vec{y} \in \operatorname{Im} u \iff \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tq $\vec{y} = u(\vec{x})$

$\iff \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tq $\begin{cases} x_1+x_2=y_1 \\ x_3=y_2 \end{cases}$

$\iff \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tq $\begin{cases} x_2=y_1-x_1 \\ x_3=y_2 \end{cases}$

$\iff \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ (car aucune condition sur $\vec{y}$ pour l'existence de $\vec{x}$)

donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$

$\boxed{\text{ou}}$ $u(\vec{e_1}) = (1,0) = u(\vec{e_2})$

$u(\vec{e_3}) = (0,1)$ où $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

$(u(\vec{e_1}), u(\vec{e_2}), u(\vec{e_3}))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$

donc $((1,0),(0,1))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$

Cette famille est libre (base canonique de $\mathbb{R}^2$) donc c'est une base.

et $\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2$

4. $\ker u \neq \{\vec{0}\}$ donc u n'est pas injective
$\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2$ donc u est surjective

5. $u(\vec{e_1}) = u(\vec{e_2}) = (1,0)$
$u(\vec{e_3}) = (0,1)$
On note $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$
On a alors

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\vec{e_1}) & u(\vec{e_2}) & u(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \end{array}$$