MT23 - A2021 - Test 2 - corrigé

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

1. Sans aucun calcul, dire si A est diagonalisable dans le cas $a = 1$ (justifier).
   Correction : Si $a = 1$, 1 est valeur propre triple de A. Si A est diagonalisable, elle est alors semblable à I et on a $A = PIP^{-1} = I$. Donc A n'est pas diagonalisable.

2. Calculer le rang de $(A - I)$ (on discutera en fonction de a).
   Correction : $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a une colonne nulle donc rang $(A - I) \leq 2$.
   Si $a = 1$, on a une deuxième colonne nulle et une colonne non nulle donc rang $(A - I) = 1$.
   Si $a \neq 1$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0$ donc rang $(A - I) = 2$.

3. Donner les valeurs propres de A en précisant leurs multiplicités (on discutera en fonction de a).
   Correction : A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale.
   Si $a = 1$, 1 est valeur propre triple de A.
   Si $a \neq 1$, 1 est valeur propre double et a est valeur propre simple.

4. Sans calcul supplémentaire, dire s'il existe des valeurs de a pour lesquelles A est diagonalisable (justifier).
   Correction : Si $a = 1$, A n'est pas diagonalisable d'après la question 1.
   Si $a \neq 1$, d'après la question 2. et le théorème du rang :
   $\dim V_1 = \dim \text{Ker } (A-I) = 3 - \text{rang } (A-I) = 1 \neq \text{mult}(1) = 2$ donc A n'est pas diagonalisable.
   Il n'y a donc aucune valeur de a pour laquelle A serait diagonalisable.

5. Dans le cas $a = 0$, utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour déterminer A^4 en fonction de A^2 et A.
   Correction : On calcule le polyôme caractéristique de A
   $\pi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (-1)^3 \det(A - \lambda I) = -\det(A - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)^2 = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda$.
   D'après Cayley-Hamilton, $\pi_A(A) = 0$ donc $A^3 - 2A^2 + A = 0$.
   On a donc $A^3 = 2A^2 - A$
   et $A^4 = 2A^3 - A^2 = 2(2A^2 - A) - A^2 = 3A^2 - 2A$

Exercice 2

1. Soit X_1 et X_2 deux vecteurs orthogonaux, montrer que (X_1, X_2) est une famille libre.
   Correction : $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad < X_1, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 >= 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha_1 < X_1, X_1 > + \alpha_2 < X_1, X_2 >= 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha_1 < X_1, X_1 >= 0 \ \text{ car } < X_1, X_2 >= 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha_1 = 0 \ \text{ car } X_1 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_2 X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0 \ \text{ car } X_2 \neq 0$$

2. Soit la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Q est-elle une matrice orthogonale ?

   Si oui, justifier.

   Si non, modifier la matrice pour qu'elle le soit.

   Correction : On a $Q_1^T Q_2 = Q_2^T Q_3 = Q_1^T Q_3 = 0$ donc les 3 colonnes sont orthogonales.
   On a bien $||Q_2|| = 1$ mais $||Q_1|| = ||Q_3|| = 2 \neq 1$ donc Q n'est pas orthogonale.
   Si on norme les colonnes, elles formeront bien une base orthonormée
   donc la matrice $Q' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Exercice 3

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On munit E d'un produit scalaire $< .,. >$.
   (a) Soit F un s.e.v. de E, donner la définition de $F^\perp$.
   Correction : $F^\perp = \{\vec{x} \in E \text{ tq } \forall \vec{y} \in F, \ < \vec{x}, \vec{y} >= 0\}$

   (b) Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$
   Correction : $\vec{x} \in F \cap F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} \in F \\ \forall \vec{y} \in F, \ < \vec{x}, \vec{y} >= 0 \end{cases} \Rightarrow < \vec{x}, \vec{x} >= 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit

$$< x, y >= x_1y_1 + bx_2y_2 + ax_1y_2 + cx_2y_1 \text{ où } a, b, c \text{ sont des paramètres réels.}$$

   (a) Donner la matrice A telle que $< x, y >= x^TAy$.
   Correction : On obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ c & b \end{pmatrix}$.

   (b) Donner deux conditions nécessaires (mais non forcément suffisantes) sur les paramètres pour que cette forme soit un produit scalaire.
   Correction : Pour avoir la symétrie, il faut que A soit symétrique donc $a = c$.
   Une condition nécessaire pour que A soit définie positive est que ses éléments diagonaux le soient donc il faut $b > 0$.

   (c) On pose $a = c = 1$ et $b = 2$
      i. Démontrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
      Correction :
      — Symétrique : $< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 = y_1x_1 + 2y_2x_2 + y_1x_2 + y_2x_1 =< y, x >$.
      — Bilinéaire : $< \alpha x + \beta z, y >= (\alpha x + \beta z)^TAy = (\alpha x^T + \beta z^T)Ay = \alpha x^TAy + \beta z^TAy$
      d'où $< \alpha x + \beta z, y >= \alpha < x, y > +\beta < z, y >$.
      On a la linéarité par rapport à la seconde variable grâce à la symétrie.
      — Défini positif : $< x, x >= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2$ donc $< x, x >\geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$.
      $< x, x >= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

      ii. Quelle est la norme associée à **ce** produit scalaire ? On ne demande pas de démontrer qu'il s'agit d'une norme.
      Correction : $||x|| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2}$.

      iii. Calculer, avec la norme ainsi définie, la norme du vecteur $(1, 1)$.
      Correction : $||(1, 1)|| = \sqrt{1 + 2 + 2} = \sqrt{5}$.
      iv. Soit $F = \text{vect} < (1, 1) >$, calculer $F^\perp$.
      Correction :

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Leftrightarrow < x, (1, 1) >= 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + x_1 + x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_2 = -\frac{2}{3}x_1 \\ &\Leftrightarrow x = (x_1, -\frac{2}{3}x_1) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{x_1}{3}(3, -2) \end{aligned}$$

      On vérifie que $(3, -2) \in F^\perp$ et donc $F^\perp = \text{vect} < (3, -2) >$.