MT23 - A2022 - Test 2

NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (3,5 ; 2,5 ; 1,5 ; 3,5). Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de M et en déduire que M est inversible.
2. Calculer les vecteurs propres de M.
3. Exprimer M^3 en fonction de M et I.
4. Exprimer M^{-1} en fonction de M et I.

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on cherche $x \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $Ax = b \quad (S)$.

1. De quels espaces vectoriels $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Est-ce que le système (S) peut admettre une solution unique ? Justifier soigneusement la réponse.
3. Peut-on avoir une solution pour tout $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? Si oui, à quelle condition ? Justifier soigneusement la réponse.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Donner la définition d'un produit scalaire.
2. Donner la définition de l'orthogonal de F.

Exercice 4 Soit $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. On suppose que B a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Soit (Y_1, Y_2) une famille libre de V_{λ_1} et Y_3 un vecteur non nul de V_{λ_2}.

1. Montrer que (Y_1, Y_3) est une famille libre.
2. Est-ce que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ est un vecteur propre ?
3. Montrer que (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre.
4. On définit l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $u(X) = BX$.
   (a) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base canonique ? Justifier le résultat.
   (b) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base (Y_1, Y_2, Y_3) ? Justifier le résultat.