MT23 - A2023 - Test 2 - Corrigé

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α et c sont deux réels.

1. Donner les valeurs propres de A en précisant leurs multiplicités (on discutera suivant les paramètres).
2. (a) Si α=1, déterminer le rang de $(A-I)$ selon les valeurs de c. En déduire la dimension des sous-espaces propres.
   (b) Si α=2, déterminer le rang de $(A-2I)$ selon les valeurs de c. En déduire la dimension des sous-espaces propres.
3. En déduire des conditions nécessaires et suffisantes sur α et c pour que A soit diagonalisable.
4. On pose $\alpha = c = 1$, exprimer A^{-1} à l'aide de A^2, A et I.

Correction :

1. A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale. On a donc :
   — Si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$, on a 3 valeurs propres simples : 1, 2 et α.
   — Si $\alpha = 1$, 1 est valeur propre double et 2 est valeur propre simple.
   — Si $\alpha = 2$, 1 est valeur propre simple et 2 est valeur propre double.
2. **Sans calculer les vecteurs propres** :
   (a) Si α=1, $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a une colonne nulle donc $\text{rang}(A-I) < 3$. La deuxième colonne est non nulle donc $\text{rang}(A-I) > 1$. On en déduit donc :
   — Si $c = 0$, $\text{rang}(A-I) = 1$.
   — Si $c \neq 0$, $\text{rang}(A-I) = 2$ (car les 2 dernières colonnes sont alors non colinéaires).
   D'aprés le théorème du rang, on a donc
   — Si $c = 0$, $\dim \text{Ker}(A-I) = 3 - 1 = 2$ *i.e.* $\dim V_1 = 2$.
   — Si $c \neq 0$, $\dim \text{Ker}\ (A-I) = 3 - 2 = 1$ *i.e.* $\dim V_1 = 1$.
   2 étant une valeur propre simple, on a $\dim V_2 = 1$.
   (b) Si α=2, $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a une colonne nulle donc $\text{rang}(A-I) < 3$. La première colonne est non nulle donc $\text{rang}(A-I) > 1$. Quelle que soit la valeur de c, la première et la dernière colonnes sont colinéaires, donc $\text{rang}\ (A-2I) = 1$.
   D'aprés le théorème du rang, on a donc $\dim \text{Ker}(A-2I) = 3 - 1 = 2$ *i.e.* $\dim V_2 = 2$.
   1 étant une valeur propre simple, on a $\dim V_1 = 1$.
3. A est diagonalisable $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim V_{\lambda_i} = 3$

   — Si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 2$, on a 3 valeurs propres simples donc $\dim V_1 = \dim V_2 = \dim V_c = 1$ et $\sum_{i=1}^{3} \dim V_{\lambda_i} = 3$.
   — Si $\alpha = 1$, on a $\sum_{i=1}^{2} \dim V_{\lambda_i} = 3 \Leftrightarrow \dim V_1 = 2 \Leftrightarrow c = 0$.
   — Si $\alpha = 2$, on a $\sum_{i=1}^{2} \dim V_{\lambda_i} = 3$.
   Donc A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ ($\alpha \neq 1$ et c quelconque) ou ($\alpha = 1$ et $c = 0$).
4. $\pi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$ d'où

$$\pi_A(A) = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I = 0 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}(A^3 - 4A^2 + 5A) \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I)$$

Exercice 2 Soit $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. On suppose que B a deux valeurs propres distinctes : λ_1 (simple) et λ_2 (double).
Soit Y_1 un vecteur propre associé à λ_1 et Y_2 un vecteur propre associé à λ_2.

1. Démontrer que (Y_1, Y_2) est une famille libre.
2. Soit $Z \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{B}' = (Y_1, Y_2, Z)$ soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   On définit l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $u(X) = BX$.
   (a) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base canonique ?
   Justifier le résultat.
   (b) Montrer que la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base $\mathcal{B}'$ est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

   où on déterminera γ (a et b sont deux réels indéterminés).
   Justifier soigneusement le résultat.

Correction :

1. Soit α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = 0 \quad (*) \\
\Rightarrow \quad & (B - \lambda_1 I)(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = (B - \lambda_1 I)0 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 (B - \lambda_1 I) Y_1 + \alpha_2 (B - \lambda_1 I) Y_2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha_2 (B - \lambda_1 I) Y_2 = 0 \quad \text{car } (B - \lambda_1 I) Y_1 = 0 \text{ puisque } Y_1 \in V_{\lambda_1} \\
\Rightarrow \quad & \alpha_2 \lambda_2 Y_2 - \alpha_2 \lambda_1 Y_2 = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) Y_2 = 0 \quad \text{car } BY_2 = \lambda_2 Y_2 \text{ puisque } Y_2 \in V_{\lambda_2} \\
\Rightarrow \quad & \alpha_2 = 0 \quad \text{car } Y_2 \neq 0 \text{ (vecteur propre) et } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 Y_1 = 0 \quad \text{d'après } (*) \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 = 0 \quad \text{car } Y_1 \neq 0 \text{ (c'est un vecteur propre)}
\end{aligned}$$

   $\boxed{\textbf{ou}}$

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = 0 \quad (*) \\
\Rightarrow \quad & B(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = B0 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 BY_1 + \alpha_2 BY_2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 \lambda_1 Y_1 + \alpha_2 \lambda_2 Y_2 = 0 \quad \text{car } (\lambda_1, Y_1) \text{ et } (\lambda_2, Y_2) \text{ couples propres de } B \\
\Rightarrow \quad & \lambda_1 \alpha_1 Y_1 - \lambda_2 \alpha_1 Y_1 = 0 \quad \text{car } \alpha_2 Y_2 = -\alpha_1 Y_1 \text{ d'après } (*) \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) Y_1 = 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha_1 = 0 \quad \text{car } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ et } Y_1 \neq 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha_2 Y_2 = 0 \quad \text{d'après } (*) \\
\Rightarrow \quad & \alpha_2 = 0 \quad \text{car } Y_3 \neq 0
\end{aligned}$$

2. (a) Dans la base canonique, la matrice de u est B. En effet, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a

$$u(e_1) = Be_1 = B_1, \quad u(e_2) = Be_2 = B_2, \quad u(e_3) = Be_3 = B_3,$$

   où B_i désigne la colonne i de B.

   (b) On sait que $u(Y_1) = BY_1 = \lambda_1 Y_1$ et que $u(Y_2) = BY_2 = \lambda_2 Y_2$, ce qui nous donne les deux premières colonnes de T.
   On ne connait pas Z donc on ne peut pas calculer $u(Z) = BZ$. Cependant, les matrices B et T sont semblables (elles représentent la même application linéaire u dans 2 bases différentes) donc elles ont les mêmes valeurs prores. T étant triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale et on a donc $\gamma = \lambda_2$.

Exercice 3 Questions de cours

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   (a) Donner la définition de $\ll A$ est diagonalisable dans $\mathbb{R} \gg$.
   (b) Montrer que
   A est diagonalisable dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (a) Donner la définition d'une norme sur E.
   (b) Donner la définition de $(y_1, \ldots, y_n)$ est une famille orthonormée de E.

Correction :

1. (a) A est diagonalisable dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, D$ diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$
   (b)

$$\begin{aligned}
A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \exists\, D \text{ diagonale et } P \text{ inversible telles que } A = PDP^{-1} \\
&\Leftrightarrow \exists\, D = \begin{pmatrix} \mu_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix} \text{ et } P \text{ inversible telles que } AP = PD \\
&\Leftrightarrow \exists\, P = (P_1 \ldots P_n) \text{ inversible telle que } AP_i = \mu_i P_i,\ i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \exists \text{ une base } \mathcal{B} = (P_1, \ldots, P_n) \text{ telle que } AP_i = \mu_i P_i,\ i = 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \exists \text{ une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ constituée de vecteurs propres de } A
\end{aligned}$$

2. (a) Une norme est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie, pour tout $\vec{x} \in E$,
      i. $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
      ii. $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
      iii. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|,\ \forall \vec{y} \in E$
   (b) $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ est une famille orthonormée de E si
      i. $< \vec{y}_i, \vec{y}_j >= 0, \forall i \neq j$
      ii. $\|\vec{y}_i\| = 1, \forall i = 1, \ldots, n$.