MT23 - A2023 - Test 1

NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (; ;). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_2$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et on note (p_0, p_1, p_2) sa base canonique (on rappelle que $p_k(t) = t^k,\ \forall t \in \mathbb{R}$ et $k = 0, 1$ ou 2).

Soit $F = \{p \in \mathcal{P}_2 / p(0) = 0\}$ et $G = \{p \in \mathcal{P}_2 / p' = 0_{\mathcal{P}_2}\}$ (où p' désigne la dérivée de p et $0_{\mathcal{P}_2}$ le polynôme nul de $\mathcal{P}_2$).

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_2$.
2. Déterminer une base et la dimension de F et G.
3. Montrer que $F \oplus G = \mathcal{P}_2$.

Exercice 2 Soient $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (-1,0,1)$ et $v_3 = (0,2,0)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ avec

$$u(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2 + 3x_3, x_1 + 3x_2) \qquad \forall x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que u est une application linéaire.
3. Montrer que $(u(v_1), u(v_2), u(v_3))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.
4. En déduire que u est surjective.

Exercice 3 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2 + x_3) \qquad \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Sans calcul, dire si u peut être bijective.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
3. u est-elle injective ?
4. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (à savoir $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$) et (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (à savoir $f_1 = (1, 0)$ et $f_2 = (0, 1)$). Ecrire la matrice A représentant l'application u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment A est construite).