MT23 - A2022 - Examen médian

Durée 1h30 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice sur une copie **séparée.**
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 6 points*) **CHANGER DE COPIE**

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et on note $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ sa base canonique (on rappelle que E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i colonne j qui vaut 1).
Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble commutant de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices qui commutent avec A :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \,/\, AB = BA\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.
2. Justifier que A est inversible et montrer que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^{-1})$
(*indication : on pensera à la multiplication par une matrice convenable*).
3. On cherche à déterminer une base de $\mathcal{C}(A)$.
   (a) Dire si les matrices suivantes appartiennent à $\mathcal{C}(A)$: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$
   (b) Déterminer une base de $\mathcal{C}(A)$.
4. Soit $\varphi_A : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'application donnée par
$$\varphi_A(B) = AB - BA, \quad \forall B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$
Montrer que φ_A est une application linéaire. Quel lien existe-t-il entre $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$ et $\mathcal{C}(A)$?
5. En déduire $\mathrm{rang}(\varphi_A)$ et déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.
6. Déterminer la matrice représentative de φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (*barème approximatif : 4 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique.
Pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ de la forme $p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2$, on considère l'application $u : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ définie par

$$u(p) = 2p' - p + a_0\, p_0.$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer l'expression de la matrice A représentant u dans la base canonique de $\mathcal{P}_2$.

3. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{rang}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
4. Soient $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 + 2p_1$ et $q_2 = 2p_1 + p_2$. On définit la matrice
$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que Q est inversible et en déduire que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de $\mathcal{P}_2$. Que représente Q ?
5. Déterminer Q^{-1}.
6. En déduire l'expression de A', la matrice représentant u dans la base $\mathcal{B}'$, en fonction de A, Q et Q^{-1} (on ne demande pas de calculer A').

Exercice 3 (*barème approximatif : 5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Dans cet exercice, on se propose de calculer le déterminant suivant pour certaines valeurs de n :
$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$
où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

1. Que vaut $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ si il existe deux indices distincts $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $a_i = a_j$?
2. On pose $\underline{n = 2}$, calculer $V_2(a_1, a_2)$.
3. On pose $\underline{n = 3}$.
   (a) En vous aidant des formules $C_i - a_1 C_{i-1}$ pour $i = 2$ et 3 (où C_i désigne la colonne i) montrer que
   $$V_3(a_1, a_2, a_3) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)V_2(a_2, a_3).$$
   (b) En déduire $V_3(a_1, a_2, a_3)$.
   (c) Application :
      i. Calculer la valeur du déterminant de
      $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$
      ii. Soit $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, justifier que l'équation $Ax = b$ admet une unique solution.
4. On pose $\underline{n = 4}$. En vous inspirant des questions précédentes, montrer que
$$V_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)\, V_3(a_2, a_3, a_4)$$
et en déduire $V_4(a_1, a_2, a_3, a_4)$.