MT23-P2014 Examen Médian : CORRIGÉ

Exercice 1 : CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : XXX points)*

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les matrices non nulles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

   Réponse : si $Y \in \mathrm{Im}(A)$, il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $Y = AX$. Il vient alors $AY = A^2X = 0$, donc $Y \in \mathrm{Ker}(A)$.

   (b) En déduire que rang(A) = 1 et que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$.

   Réponse : comme $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{rang(A)} = \dim(\mathrm{Im(A)}) \leq \dim(\mathrm{Ker(A)})$. De plus, d'après le théorème du rang, il vient $\mathrm{rang(A)} + \dim(\mathrm{Ker(A)}) = 3$, ce qui implique que $3 \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$. Donc $2 \leq \dim(\mathrm{Ker}(A)) \leq 3$ (la dimension est un entier). Comme A est non nulle, la seule possibilité est que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2$ et donc $\mathrm{rang(A)} = 1$.

2. (a) Soient X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   i. Calculer la matrice $A = XY^T$.

   Réponse : le calcul est immédiat :

$$A = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} y_1X & y_2X & y_3X \end{array}\right].$$

   ii. Déterminer l'image et le rang de A. Justifier.

   Réponse : l'image de A est engendrée par les colonnes de A. D'après l'expression de A, il vient que

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect} < A_1, A_2, A_3 >= \mathrm{Vect} < y_1X, y_2X, y_3X >= \mathrm{Vect} < X >,$$

   car l'un au moins des y_i est non nul, puisque $Y \neq 0$. Donc, comme $X \neq 0$, rang(A) = 1.

   iii. Calculer Y^TX, puis en déduire A^2. On fera apparaître la trace de A.

   Réponse : $Y^TX = \sum_{i=1}^{3} y_ix_i = Tr(A)$ est le produit scalaire de X et de Y. Il vient (attention le produit matriciel n'est pas commutatif !) :

$$A^2 = XY^TXY^T = X(Y^TX)Y^T = (Y^TX)\,XY^T = Tr(A)\,A,$$

   où on a utilisé le fait que le produit matriciel est associatif, que Y^TX est un scalaire, et que $\lambda MN = M\lambda N = MN\lambda$ (pour deux matrices M et N pour lequel le produit MN a un sens et pour un scalaire λ).

   (b) Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1. Soit $\{X\}$ une base de $\mathrm{Im}(A)$. Montrer qu'il existe un vecteur Y non nul tel que $A = XY^T$.

   Réponse : A est de rang 1, donc $\mathrm{Im}(A)$ admet une base constituée d'un unique vecteur noté X. Ce vecteur X est non nul car $\{X\}$ est une famille libre.

   Les colonnes A_j de A appartiennent à $\mathrm{Im}(A)$ (car $A_j = Ae_j$, où $(e_j)_{j=1,2,3}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$). Donc il existe y_1, y_2, y_3 dans $\mathbb{R}$ tels que $A_j = y_jX$, $j = 1,2,3$ (car $\{X\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(A)$). On conclut

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} y_1X & y_2X & y_3X \end{array}\right] = XY^T, \quad \text{où } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

   On remarque que $Y \neq 0$, car sinon A serait nulle, ce qui est contradictoire avec rang(A) = 1.

3. Déduire des questions précédentes les matrices non nulles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$.
   Réponse : si A non nulle vérifie $A^2 = 0$, alors rang(A) = 1, d'après la question 1. La question 2.b) implique alors qu'il existe X et Y non nuls dans $\mathbb{R}^3$ tels que $A = XY^T$. La condition $A^2 = 0$ implique alors que $\text{Tr}(A)A = 0$. Comme $A \neq 0$, cela implique que $\text{Tr}(A) = Y^T X = 0$.
   Réciproquement, les matrices $A = XY^T$ telles que $Y^T X = 0$ vérifient bien $A^2 = 0$. La matrice nulle s'écrit également sous cette forme.
   Conclusion : l'ensemble des matrices telles que $A^2 = 0$ est l'ensemble des matrices de rang 1 et de trace nulle, ce qui s'écrit
   $$\left\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0\right\} = \left\{XY^T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid X, Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \text{ et } \text{Tr}(XY^T) = Y^T X = 0\right\}.$$

Exercice 2 : CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : XXX points)*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour un $n \geq 1$ donné. On note

$$\begin{aligned} f :\ & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & A \mapsto f(A) = \text{Tr}(A) \end{aligned}$$

où $\text{Tr}(A)$ est la trace d'une matrice A carrée.

1. Montrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
   Réponse : soit $A, B \in E$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il vient
   $$f(\lambda A+\mu B) = \text{Tr}(\lambda A+\mu B) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}+\mu b_{ii}) = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{ii}+\mu\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda\text{Tr}(A)+\mu\text{Tr}(B) = \lambda f(A)+\mu f(B).$$
   Donc f est linéaire.
2. Donner les dimensions de l'image et du noyau de f.
   Réponse : $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$, donc rang(f) ≤ 1. Comme f n'est pas l'application nulle ($\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$ par exemple), rang(f) $\neq 0$. On conclut alors que rang(f) = 1 et, d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rang(f)} = \text{n}^2 - 1$.
3. On pose $G = \text{Vect} < I_n >$, où I_n est la matrice identité de E. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus G$.
   Réponse : comme $I_n \neq 0$, $\{I_n\}$ est une base de G et $\dim(G) = 1$. Pour montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus G$, comme $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(G) = \dim(E)$, il suffit de montrer que $\text{Ker}(f) \cap G = \{0\}$ ou que $E = \text{Ker}(f) \oplus G$. On prouve la première égalité :
   soit $A \in \text{Ker}(f) \cap G$. A appartient à G, donc il existe un scalaire α tel que $A = \alpha I_n$ (car $\{I_n\}$ est un générateur de G). De plus, A est dans le noyau de f, ceci s'écrit :
   $$0 = f(A) = f(\lambda I_n) = \lambda f(I_n) = \lambda \text{Tr}(I_n) = \lambda n,$$
   car f est linéaire. Comme $n > 0$, on conclut que $\lambda = 0$ et donc $\text{Ker}(f) \cap G = \{0\}$.
   Finalement, on a bien $E = \text{Ker}(f) \oplus G$.
4. Soit Π la projection de E sur G parallèlement à $\text{Ker}(f)$. Déterminer $\Pi(A)$, pour $A \in E$.
   Réponse : comme $\text{Ker}(f)$ et G sont supplémentaires dans E, toute matrice A de E se décompose de façon unique en $A = \alpha I_n + B$ où B est dans $\text{Ker}(f)$. On peut donc effectivement définir la projection Π sur G parallèlement à $\text{Ker}(f)$ par :
   $$\Pi(A) = \alpha I_n,$$
   où α est tel que $B = A - \alpha I_n \in \text{Ker}(f)$, c'est-à-dire que
   $$0 = f(B) = \text{Tr}(A - \alpha I_n) = \text{Tr}(A) - \alpha n \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\text{Tr}(A)}{n}.$$
   On conclut
   $$\Pi(A) = \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n.$$

Exercice 3 : CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : XXX points)*

Dans cet exercice, il est demandé de bien préciser les calculs qui sont effectués à chaque étape et de bien justifier. Sans explication, la question ne sera pas comptabilisée.

1. Calculer le déterminant
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}, \qquad \text{où } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

   Réponse : aucun calcul n'est nécessaire ! On retranche la première colonne à la seconde et à la troisième colonnes. Ensuite, on utilise la linéarité par rapport aux seconde et troisième colonnes. Enfin, on retranche la deuxième colonne à la troisième.
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & y+x & z-y \end{vmatrix}.$$
   C'est une matrice triangulaire : le déterminant est le produit des termes diagonaux. On obtient
$$\Delta = (y-x)(z-x)(z-y).$$
   C'est un déterminant de Van der Monde. On remarque que le déterminant est nul si $x = y$ ou $y = z$ ou $z = x$, ce qui correspond à une matrice avec des colonnes égales : c'est normal !

2. Calculer le déterminant
$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{vmatrix}, \qquad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

   Indication : on pourra introduire les vecteurs colonnes $A = \begin{bmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} c \\ c^2 \\ c^3 \end{bmatrix}$.

   Réponse : il y a très peu de calculs. En utilisant la multilinéarité du déterminant, le fait que le déterminant s'annule si 2 colonnes sont égales et que le déterminant change de signe si on échange 2 colonnes, on a
$$\begin{aligned} D &= \det(A+B|B+C|C+A) \\ &= \det(A|B|C) + \det(A|B|A) + \det(A|C|C) + \det(A|C|A) \\ &\quad + \det(B|B|C) + \det(B|B|A) + \det(B|C|C) + \det(B|C|A) \\ &= \det(A|B|C) + \det(B|C|A) = \det(A|B|C) - \det(B|A|C) = \det(A|B|C) + \det(A|B|C) \\ &= 2\det(A|B|C) \end{aligned}$$
   Il vient alors, en utilisant à nouveau la multilinéarité :
$$D = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b),$$
   en utilisant la question précédente.

Exercice 4 : CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : XXX points)*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. On rappelle qu'un projecteur est une application linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p^2 = p$ (où on a noté $p^2 = p \circ p$ la composée de p avec lui-même). Soient p et q deux projecteurs de $\mathcal{L}(E)$. On étudie
$$\phi = p + q \in \mathcal{L}(E).$$

1. Montrer que si $p \circ q = -q \circ p$ alors $p \circ q = q \circ p = -p \circ q \circ p$.
   Réponse : on multiplie $p \circ q = -q \circ p$ à gauche et à droite par p pour obtenir :
   $$p^2 \circ q = p \circ q = -p \circ q \circ p \quad \text{et} \quad p \circ q \circ p = -q \circ p^2 = -q \circ p.$$
2. En déduire que ϕ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
   Réponse : on commence par remarquer que :
   $$\begin{aligned} \phi^2 = \phi &\iff (p+q) \circ (p+q) = p + q \\ &\iff p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q \\ &\iff p \circ q = -q \circ p, \end{aligned}$$
   car $p^2 = p$ et $q^2 = q$.
   Donc, d'une part, si $p \circ q = q \circ p = 0$, il vient immédiatement $\phi^2 = \phi$.
   Réciproquement, si $\phi^2 = \phi$, alors $p \circ q = -q \circ p$ et, d'après la question précédente, on a également $p \circ q = q \circ p$. Ces 2 équations prouvent alors que $p \circ q = q \circ p = 0$.
   On a bien prouvé l'équivalence voulue.
3. Montrer que $p \circ q = 0$ est équivalent à $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$.
   Réponse : si $p \circ q = 0$, alors soit $y \in \mathrm{Im}(q)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = q(x)$. On en déduit que $p(y) = (p \circ q)(x) = 0$, et donc que $y \in \mathrm{Ker}(p)$. On a bien $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$.
   Réciproquement, si $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Ker}(p)$. Soit un $x \in E$. Alors $q(x)$ est dans $\mathrm{Im}(q)$, donc dans $\mathrm{Ker}(p)$, donc $p(q(x)) = 0$. On vient de prouver que $(p \circ q)(x) = 0$ $\forall x \in E$, c'est-à-dire que $p \circ q = 0$.
4. On suppose que $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
   Réponse : on travaille par double inclusion.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. On a donc $p(x) = q(x) = 0$ et donc $\phi(x) = (p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ et x est dans $\mathrm{Ker}(\phi)$. On a montré : $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$
   Réciproquement : soit $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$. On a donc $\phi(x) = 0 = p(x) + q(x)$, donc $p(x) = -q(x)$. On applique p à cette équation :
   $$p^2(x) = p(x) = -(p \circ q)(x) = 0,$$
   car $p \circ q = 0$. On en déduit que $p(x) = 0 = q(x)$ et donc que $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
   Conclusion : on a montré que $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.
   Réponse : il faut montrer la double inclusion et que les images de p et de q sont en somme directe.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(\phi)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = \phi(x) = p(x) + q(x)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. On a montré $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Il existe donc x_1 et x_2 (différents *a priori*) dans E tels que $y = p(x_1) = q(x_2)$. On applique p à l'équation pour obtenir :
   $$p(y) = p^2(x_1) = p(x_1) = y = p \circ q(x_2) = 0,$$
   car $p \circ q = 0$. On conclut donc que $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$ et donc que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe.
   Enfin, soit $y \in \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$. Il existe donc $z_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $z_2 \in \mathrm{Im}(q)$ (uniques), tels que $y = z_1 + z_2$. Il existe donc x_1 et x_2 dans E tels que $y = p(x_1) + q(x_2)$. On applique successivement p et q à cette équation :
   $$p(y) = p^2(x_1) + (p \circ q)(x_2) = p(x_1) \quad \text{et} \quad q(y) = (q \circ p)(x_1) + q^2(x_2) = q(x_2).$$

On conclut donc que $y = p(y) + q(y) = \phi(y)$. Donc y est dans $\mathrm{Im}(\phi)$, et on obtient donc $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(\phi)$.
Finalement on a bien montré que

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q).$$

Exercice 5 : CHANGER DE COPIE *(barème approximatif : XXX points)*

Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \geq 0$. On note $\mathcal{E}_n = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ la base canonique de $\mathcal{P}_n$. Soit un réel $h \neq 0$ et soit u l'application définie par :

$$(u(p))(t) = p''(t) + \frac{h^2}{12} p^{(4)}(t), \quad \forall p \in \mathcal{P}_4.$$

1. Montrer que u appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{P}_4, \mathcal{P}_2)$.
Réponse : c'est immédiat d'après la linéarité de la dérivation, car pour tout λ et μ dans $\mathbb{R}$ et pour tout p et q dans $\mathcal{P}_4$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda p + \mu q)(t) &= (\lambda p + \mu q)''(t) + \frac{h^2}{12}(\lambda p + \mu q)^{(4)}(t) = \lambda p''(t) + \mu q''(t) + \lambda \frac{h^2}{12} p^{(4)}(t) + \mu\lambda \frac{h^2}{12} q^{(4)}(t) \\ &= \lambda u(p)(t) + \mu u(q)(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De plus, si $\deg(p) \leq 4$, alors $\deg(p'') \leq 4 - 2 = 2$ et $\deg(p^{(4)}) \leq 4 - 4 = 0$ (en prenant pour convention que le polynôme nul a un degré égal à $-\infty$). Donc $u(p)$ est dans $\mathcal{P}_2$ si p est dans $\mathcal{P}_4$.

2. Écrire la matrice A de u dans les bases canoniques de $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_2$.
Réponse : les colonnes de A sont les composantes de $u(p_i)$ écrites dans la base canonique de $\mathcal{P}_2$. Comme

$$u(p_0) = 0,\ u(p_1) = 0,\ u(p_2) = 2p_0,\ u(p_3) = 6p_1,\ u(p_4) = 12p_2 + 2h^2 p_0,$$

il vient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 2h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

Pour un $p = \sum_{i=0}^4 \alpha_i p_i \in \mathcal{P}_4$, il vient

$$u(p) = (2\alpha_2 + 2h^2\alpha_4)p_0 + 6\alpha_3 p_1 + 12\alpha_4 p_2. \tag{1}$$

3. On définit les familles $\mathcal{Q}_2 = (q_0, q_1, q_2)$ et $\mathcal{Q}_4 = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4)$ avec

$$q_0(t) = 1,\ q_1(t) = t,\ q_2(t) = t(t+h),\ q_3(t) = t(t+h)(t-h),\ q_4(t) = t^2(t+h)(t-h).$$

Écrire la matrice M contenant les colonnes de $\mathcal{Q}_4$ écrites dans la base $\mathcal{E}_4$.
Réponse : les colonnes de M sont les composantes des q_j écrites dans la base des p_i. Comme

$$q_0 = p_0,\ q_1 = p_1,\ q_2 = p_2 + hp_1,\ q_3 = p_3 - h^2 p_1,\ q_4 = p_4 - h^2 p_2,$$

il vient

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & -h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. En déduire que $\mathcal{Q}_4$ est une base de $\mathcal{P}_4$, puis que $\mathcal{Q}_2$ est une base de $\mathcal{P}_2$.

   Réponse : la matrice M est triangulaire, son déterminant est le produit de ses termes diagonaux, donc $\det(M) = 1 \neq 0$. Donc M est inversible, ce qui est équivalent au fait que la famille $\mathcal{Q}_4$ est une base de $\mathcal{P}_4$ (cf. Proposition II.2.5 du Chapitre 2). Donc M est une matrice de passage entre $\mathcal{E}_4$ et $\mathcal{Q}_4$.

   La sous-famille $\mathcal{Q}_2$ de $\mathcal{Q}_4$ est libre. Elle est aussi dans $\mathcal{P}_2$, et contient 3 éléments : c'est une base de $\mathcal{P}_2$ et la matrice

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   représentant les coordonnées de la base $\mathcal{Q}_2$ dans la base $\mathcal{E}_2$ est la matrice de passage de $\mathcal{E}_2$ à $\mathcal{Q}_2$.

5. Calculer la matrice B de u dans les bases $\mathcal{Q}_4$ et $\mathcal{Q}_2$. Bien justifier.

   Réponse : il suffit d'appliquer la formule de changement de base avec précaution.

$$B = B_{\mathcal{Q}_2 \leftarrow \mathcal{Q}_4} = (N^{-1})_{\mathcal{Q}_2 \leftarrow \mathcal{E}_2} A_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{E}_4} M_{\mathcal{E}_4 \leftarrow \mathcal{Q}_4} = N^{-1}AM.$$

   Après quelques calculs (calcul de l'inverse de N, l'inverse de M est inutile ici, et calcul du produit matriciel $N^{-1}AM$), on obtient :

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -12h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}.$$

   Les colonnes de B sont les composantes de $(u(q_j))_{j=0,\dots,4}$ écrites dans la base $\mathcal{Q}_2$

6. Calculer $u(q_4)$ et comparer avec B.

   Réponse : Comme

$$q_4(t) = t^4 - h^2t^2,\ q_4''(t) = 12t^2 - 2h^2,\ q_4^{(4)}(t) = 24,$$

   donc

$$u(q_4) = 12t^2 = 12(t^2 + ht) - 12ht = 12q_2 - 12hq_1.$$

   C'est bien cohérent avec la dernière colonne de B.