MT23 - Final - A 2020

Exercice 1

Partie I

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ On a $L_1 = -L_2$ donc $\text{rang}(A-I) \leq 2$ et $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\text{rang}(A-I) = 2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ On a $L_2 = L_3$ donc $\text{rang}(A-2I) \leq 2$ et $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc $\text{rang}(A-2I) = 2$

$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ On a $L_1 = 0$ donc $\text{rang}(A-2I)^2 \leq 2$
$L_2 = L_3$ donc $\text{rang}(A-2I)^2 \leq 1$
$(A-2I)^2 \neq 0$ donc $\text{rang}(A-2I)^2 = 1$

2. D'après la question 1, on a $\dim \text{Ker}(A-I) = 1$ et $\dim \text{Ker}(A-2I) = 1$
donc $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 2$ sont valeurs propres
trace $A = 5 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ donc $\mu_3 = 2$
d'où $\lambda_1 = 1$ est valeur propre simple
$\lambda_2 = 2$ est valeur propre double

3. On a $\dim \text{Ker}(A-2I) \neq \text{mult}(2)$ donc A n'est pas diagonalisable

4. (a) On a toujours le coefficient de λ^3 égal à 1 dans $\pi_A(\lambda)$
donc
$$\pi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

(b) $\pi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$
donc
$$A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0 \iff 4I = A(A^2 - 5A + 8I)$$
d'où
$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 5A + 8I)$$

5. (a) On sait que $\text{Ker}(A-2I) \subset \text{Ker}(A-2I)^2$
De plus, $\dim \text{Ker}(A-2I) < \dim \text{Ker}(A-2I)^2$
Donc l'inclusion est stricte et $\exists\, y_3 \in \text{Ker}(A-2I)^2$ tq $y_3 \notin \text{Ker}(A-2I)$

(b) $\begin{cases} y_3 \in \text{Ker}(A-2I)^2 \\ y_3 \notin \text{Ker}(A-2I) \end{cases} \iff \begin{cases} (A-2I)^2 y_3 = 0 \\ (A-2I) y_3 = y_2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (A-2I) y_2 = 0 \\ (A-2I) y_3 = y_2 \neq 0 \end{cases}$

$\iff (A-2I) y_3 = y_2$ où y_2 vecteur propre de A associé à $\lambda_2 = 2$

(c) $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \underbrace{(A-2I)Y_1}_{=-Y_1} + \alpha_2 \underbrace{(A-2I)Y_2}_{=0} + \alpha_3 \underbrace{(A-2I)Y_3}_{=Y_2} = 0$

$\Rightarrow -\alpha_1 Y_1 + \alpha_3 Y_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = 0$ car (Y_1, Y_2) libre (vect. pr. associés à $\lambda_i \neq$)

$\Rightarrow \alpha_2 Y_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = 0$ car $Y_2 \neq 0$

(d) Soit $P = (Y_1 \ Y_2 \ Y_3)$

Alors $AP = (AY_1 \ AY_2 \ AY_3) = (Y_1 \ \ 2Y_2 \ \ Y_2 + 2Y_3)$

$= (Y_1 \ Y_2 \ Y_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

donc $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$

et P est inversible car ses colonnes forment une base.

6 - $(A-I)Y_1 = 0 \iff \begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 = 0 \\ -y_1 - 2y_2 + 2y_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 = -y_2 + y_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y_3 = y_2 \\ y_1 = 0 \end{cases} \iff Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-2I)Y_2 = 0 \iff \begin{cases} y_2 - y_3 = 0 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_3 = y_2 \\ y_1 = -y_2 \end{cases} \iff Y_2 = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A-2I)Y_3 = Y_2 \iff \begin{cases} y_2 - y_3 = -1 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 = 1 \end{cases}$

On veut $y_2 = 1 \Rightarrow Y_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Partie II</u>

1. $x' = Ax \iff x' = PTP^{-1}x$

$\iff P^{-1}x' = T P^{-1}x$

$\iff z' = Tz$ où $z = P^{-1}x$

2 - (II) $\begin{cases} z_1' = z_1 \\ z_2' = 2z_2 + z_3 \quad ② \\ z_3' = 2z_3 \end{cases}$ $\Rightarrow z_1(t) = C_1 e^t$

$\Rightarrow z_3(t) = C_3 e^{2t}$

② $\iff z_2' = 2z_2 + C_3 e^{2t}$

- $z_{2h} = C_2 e^{2t}$
- $z_{2p} = \alpha t e^{2t}$ $\quad z_{2p}' = (\alpha + 2\alpha t)e^{2t}$

② $\iff \alpha + 2\alpha t = 2\alpha t + C_3$ i.e. $\alpha = C_3$.

d'où $\begin{cases} z_1(t) = C_1 e^t \\ z_2(t) = C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t} \\ z_3(t) = C_3 e^{2t} \end{cases}$

3 - $z(0) = P^{-1}x(0) \iff Pz(0) = x(0)$ on pose $z(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

On a $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} -\beta - \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \\ \gamma = -2 \end{cases}$ i.e. $z(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} z_1(t) = 2e^{t} \\ z_2(t) = e^{2t} - 2te^{2t} \\ z_3(t) = -2e^{2t} \end{cases}$

4 - $x = Pz \iff \begin{cases} x_1 = -z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 + z_3 \\ x_3 = z_1 + z_2 + 2z_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(t) = e^{2t} + 2te^{2t} \\ x_2(t) = 2e^{t} - e^{2t} - 2te^{2t} \\ x_3(t) = 2e^{t} - 3e^{2t} - 2te^{2t} \end{cases}$

Exercice 2

1 - (a) $\|Ay\|^2 = (Ay)^T Ay = y^T A^T A y = y^T y = \|y\|^2$ car $A^T A = I$

(b) Si λ est valeur propre alors $\exists y \neq 0$ tq $Ay = \lambda y$
d'où $\|Ay\| = \|\lambda y\| = \|y\|$ i.e. $|\lambda| \cdot \|y\| = \|y\|$ et $|\lambda| = 1$
car $\|y\| \neq 0$

2 - (a) Si -1 est valeur propre triple, comme A est symétrique, elle est diagonalisable et $\exists$ P orthogonale tq
$A = P(-I)P^T = -PP^T = -I$ i.e. $A = -I$

(b) A est symétrique donc ses valeurs propres sont réelles
A est orthogonale donc $|\lambda| = 1$ et $\lambda = \pm 1$
D'après (a), -1 ne peut pas être valeur propre triple donc la seule solution pour avoir $\det A = -1$ est :
-1 valeur propre simple et 1 valeur propre double

3 - (a) $a_{22} = 0$ donc A n'est pas déf. >0 (CN)

(b) $\det A = -1$, A symétrique et orthogonale
donc les valeurs propres de A sont : 1 (double) et -1

$(A-I)Y = 0 \iff -y_2 + y_3 = 0 \iff Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A+I)Y = 0 \iff \begin{cases} 2y_1 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \iff Y = y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La base de vecteurs propres trouvée est orthogonale, il reste à les normer

d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $AP = (AP_1 \; AP_2 \; AP_3) = (P_1 \; P_2 \; -P_3)$

$= P \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D}$

(c) $q(x) = x^T A x = x^T P D P^T x = (P^T x)^T D (P^T x)$

$$P^T x = P x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{x_3}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{x_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

d'où $q(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)^2$