MT23 – A20 – Test 1 – QCM – Correction

1. A quelle définition correspond le texte suivant $\forall \vec{x} \in H, \exists \vec{y} \in F, \exists \vec{z} \in G$ tq $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$?

- $H = F + G$ ✔
- $H = F \oplus G$

2. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

- Une famille liée contient au moins 2 vecteurs. non ✔
- Une famille peut être libre et liée. non ✔
- Une famille peut être liée et génératrice. oui ✔

Corrigé : 1. cf. cours

2. - La famille $(\vec{0})$ est liée
- Liée est la négation de libre
- Par exemple la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1))$ est liée et génératrice de $\mathbb{R}^3$

Soit l'application linéaire $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, -x_2, x_1 + x_2)$.

1. Calculer $\ker u$:

- $\ker u = \{\vec{0}\}$ ✔
- $\ker u = \text{vect} < (1, -2) >$
- $\ker u = \text{vect} < (-1, 1) >$

2. u est-elle injective ? oui ✔

3. u est-elle surjective ? non ✔

4. Calculer $\text{Im}\, u$:

- $\text{im}\, u$ = vect $< (1, 1, 0), (2, 0, 1) >$ ✔
- $\text{Im}\, u$ = vect $< (1, -1, 1) >$
- $\text{Im}\, u$ = vect $< (1, 1), (2, 0) >$
- $\text{Im}\, u$ = vect $< (2, 0, 1) >$

5. Donner la matrice de u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ✔
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé : 1. $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \iff u(\vec{x}) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

2. u est injective car $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$

3. u ne peut pas être surjective car $\dim \operatorname{Im} u \leq 2 < \dim \mathbb{R}^3$

4. $\vec{y} \in \operatorname{Im} u \iff \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ tq $\vec{y} = u(\vec{x})$

$$\vec{y} = u(\vec{x}) \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ -x_2 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = y_1 + y_2 \\ -x_2 = y_2 \\ x_1 = y_3 + y_2 \end{cases}$$

d'où $\vec{y} \in \operatorname{Im} u \iff y_1 + y_2 = 2(y_3 + y_2) \iff y_1 = y_2 + 2y_3$

$\iff \vec{y} = (y_2 + 2y_3, y_2, y_3)$

$\iff \vec{y} = y_2(1,1,0) + y_3(2,0,1)$

5. Il suffit d'écrire dans les colonnes de A : $u(1,0) = (2,0,1)$ et $u(0,1) = (1,-1,1)$

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On note (p_0, p_1, p_2) la base usuelle de $\mathcal{P}_2$ (rappel : $\forall t \in \mathbb{R}, p_i(t) = t^i, i = 0, 1, 2$), donc tout $p \in \mathcal{P}_2$ s'écrit $p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$.
On note 0_p le polynôme nul.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}_2$?

- oui $H_1 = \{p \in \mathcal{P}_2 / p(1) = 0\}$
- non $H_2 = \{p \in \mathcal{P}_2 / p(1) = 1\}$
- oui $H_3 = \{p \in \mathcal{P}_2 / p(1) + p(2) = 0\}$
- oui $H_4 = \{p \in \mathcal{P}_2 / p + p' = 0_p\}$
- oui $H_5 = \{p \in \mathcal{P}_2 / p' = 0_p\}$
- oui $H_6 = \{p \in \mathcal{P}_2 / a_0 = 0\}$
- non $H_7 = \{p \in \mathcal{P}_2 / a_0 = 1\}$
- oui $H_8 = \{p \in \mathcal{P}_2 / a_1 = a_2 = 0\}$
- oui $H_9 = \{p \in \mathcal{P}_2 / a_2 = 0\}$

2. Sont-ils en somme directe ?

- H_4 et H_5 oui
- H_4 et H_8 oui
- H_5 et H_8 non
- H_5 et H_6 oui
- H_6 et H_8 oui
- H_8 et H_9 non

3. Sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{P}_2$?

- H_4 et H_5 non
- H_4 et H_8 non
- H_5 et H_8 non
- H_5 et H_6 oui
- H_6 et H_8 oui
- H_8 et H_9 non

Corrigé : 1. Si $p, q \in H_2$, $(p+q)(-1) = 2$ donc $p+q \notin H_2$

Si $p, q \in H_7$, le terme constant sera égal à 2

Pour les autres, vérifier que cela marche.

2. On remarque que $H_4 = \{0\}$, $H_5 = \text{vect}\langle p_0 \rangle$, $H_6 = \text{vect}\langle p_1, p_2 \rangle$,

$H_8 = \text{vect}\langle p_0 \rangle$ et $H_9 = \text{vect}\langle p_0, p_1 \rangle$

d'où $H_4 \cap H_5 = H_4 \cap H_8 = \{0\}$

$H_5 \cap H_8 = \text{vect}\langle p_0 \rangle \neq \{0\}$

$H_6 \cap H_8 = H_5 \cap H_6 = \{0\}$

$H_8 \cap H_9 = \text{vect}\langle p_0 \rangle \neq \{0\}$

3. Parmi les 4 sommes directes, on a :

$H_4 \oplus H_5 = H_5 \neq \mathcal{P}_2$, $H_4 \oplus H_8 = H_8 \neq \mathcal{P}_2$

$H_6 \oplus H_8 = H_5 \oplus H_6 = \mathcal{P}_2$

On définit $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, -2)$ et $\vec{v}_3 = (-3, 1, 1)$.

Donner a, b et c tels que $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0}$ ($a \geq 0$) :

$a=$ 3 ✔, $b=$ 2 ✔, $c=$ 1 ✔

Corrigé : on cherche une famille liée (mot oublié dans la question...)

Il suffit donc de résoudre $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0}$

et on trouve les valeurs de a, b, c :

Soit u une application linéaire de E dans F.

Compléter les affirmations suivantes avec la réponse qui convient :

1. $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille génératrice de $E \Rightarrow (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille génératrice de .....

- Im u ✔
- F

2. Quelle implication est toujours vraie ?

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre de E ...... $(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille libre de F.

- $\Rightarrow$
- $\Leftarrow$ ✔

3. $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une famille libre de $E \Leftrightarrow (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ est une famille libre de F si u est injective ✔

Corrigé : cf. cours