MT23 – A20 – Test 2 – QCM – Corrigé

Questions de cours

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}$ une matrice non diagonale ayant une unique valeur propre de multiplicité n, A est-elle diagonalisable ?

oui

non ✔

La réponse correcte est : non

2. $A \in \mathcal{M}_{nn}$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ A admet n valeurs propres distinctes

vrai

faux ✔

La réponse correcte est : faux

3. $A \in \mathcal{M}_{nn}$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ A inversible

vrai

faux ✔

La réponse correcte est : faux

4. 0 est valeur propre de A $\Leftrightarrow$ A n'est pas diagonalisable

vrai

faux ✔

La réponse correcte est : faux

Corrigé :

1. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à $D = \begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix} = \lambda I$

d'où $A = PDP^{-1} = P(\lambda I)P^{-1} = \lambda PIP^{-1} = \lambda I$ impossible

2. Faux. Exemple : $A = \lambda I$

3. Faux. Si 0 est valeur propre, A n'est pas inversible car $\det A = 0$

4. Faux. On peut avoir A semblable à $D = \begin{pmatrix}0 & \\ & 2\end{pmatrix}$ par exemple.

On pose $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $< x, y >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + a x_1 y_2 + b x_2 y_1$.

Dire si $< x, y >$ est un produit scalaire dans les cas suivants :

a) $a = 1$ et $b = 2$

oui

non ✔

La réponse correcte est : non

b) $a = 1$ et $b = 1$

oui

non ✔

La réponse correcte est : non

c) $a = -1$ et $b = -1$

oui

non ✔

La réponse correcte est : non

d) $a = 0$ et $b = 0$

oui ✔

non

La réponse correcte est : oui

Corrigé :

a) Si $a = 1$ et $b = 2$, ce n'est pas symétrique

b) Si $a = 1$ et $b = 1$, $<x, x> = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2$

donc, si $x = (1, -1)$, $<x, x> = 0$ et ce n'est pas déf. > 0

c) Si $a = -1$ et $b = -1$, $<x, x> = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2$

donc, si $x = (1, 1)$, $<x, x> = 0$ et ce n'est pas déf. > 0

d) On retrouve le produit scalaire usuel.

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Q est-elle orthogonale ?

oui

non ✔

La réponse correcte est : non

2. Même question pour $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

oui ✔

non

La réponse correcte est : oui

Corrigé :

1. $\|Q_2\| = \|Q_3\| = \sqrt{2}$ donc les colonnes ne sont pas normées.

2. On a bien $Q_1^T Q_2 = Q_1^T Q_3 = Q_2^T Q_3 = 0$

et $\|Q_1\| = \|Q_2\| = \|Q_3\| = 1$

Corrigé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda\left(-\lambda(2-\lambda)+1\right)$$
$$= -\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right)$$
$$= -\lambda\,(\lambda-1)^2$$

1. Donner la valeur propre simple λ_1 :

0 ✔

2. Donner la valeur propre double λ_2 :

1 ✔

3. Que vaut le sous-espace propre associé à λ_2 ?

- $V_{\lambda_2} = \text{vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ ✔
- $V_{\lambda_2} = \text{vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$
- $V_{\lambda_2} = \text{vect} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$
- $V_{\lambda_2} = \text{vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

$$(A - I)Y = 0 \iff \begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ -y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y_2 = y_1 \\ y_3 = y_1 \end{cases}$$
$$\iff Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La réponse correcte est : $V_{\lambda_2} = \text{vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

- oui
- non ✔

La réponse correcte est : non

On a $\underbrace{\dim V_{\lambda_2}}_{=1} \neq \underbrace{\text{mult}(\lambda_2)}_{=2}$

5. La matrice A est-elle inversible ?

- oui
- non ✔

La réponse correcte est : non

Non car 0 est valeur propre donc $\det A = 0$

6. Que vaut A^4 ?

- $3A^2 - 2A$ ✔
- $2A^2 - A$
- $-3A^2 + 2A$
- $-2A^2 + A$

La réponse correcte est : $3A^2 - 2A$

Corrigé 6. : D'après Cayley-Hamilton, on a

$-A^3 + 2A^2 - A = 0$ i.e. $A^3 = 2A^2 - A$

d'où $A^4 = 2A^3 - A^2$
$= 2(2A^2 - A) - A^2$
$= 3A^2 - 2A$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \ < x, y >= x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Soit $x = (1, 1, -1)$ et F =vect$< x >$.

1. Dire dans les cas suivants si $y \in F^{\perp}$:

a) $y = (1, 0, 1)$

- oui
- non

La réponse correcte est : oui

b) $y = (0, 1, 1)$

- oui
- non

La réponse correcte est : non

c) $y = (0, 1, 4)$

- oui
- non

La réponse correcte est : oui

d) $y = (0, 4, 1)$

- oui
- non

La réponse correcte est : non

2. Quelle est la norme de x ?

- $\sqrt{6}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{18}$

La réponse correcte est : $\sqrt{6}$

Corrigé :

1. a) $< x, y > = 1 - 1 = 0$

b) $< x, y > = 4 - 1 = 3 \neq 0$

c) $< x, y > = 4 - 4 = 0$

d) $< x, y > = 16 - 1 = 15 \neq 0$

2. $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$

$= \sqrt{1 + 4 + 1}$

$= \sqrt{6}$