MT23 - A2020 - Examen médian

Durée 1h30.
Les documents et machines à calculer sont interdits.
——————————
Rédigez chaque exercice sur une copie séparée.
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.
——————————

Exercice 1 (*barème approximatif : 7 points*) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit $A \in M_{33}$ et $b \in M_{31}$, on cherche à résoudre le système $Ax = b \quad (*)$.
   (a) Existe-t-il une condition nécessaire et suffisante pour que le système $(*)$ ait une solution $\forall b \in M_{31}$? Justifier soigneusement la réponse.
   (b) Existe-t-il une condition nécessaire et suffisante pour que le système $(*)$ ait une solution unique ? Justifier soigneusement la réponse.
2. On définit :
$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \text{ est un paramètre réel.}$$
   En discutant suivant les valeurs de α, répondre aux questions suivantes :
   (a) Déterminer le rang de C_α.
   (b) Déterminer Ker C_α.
   (c) Déterminer une base de Im C_α.

Exercice 2 (*barème approximatif : 7.5 points*) **CHANGER DE COPIE**
Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. On suppose que $E = F \oplus G$ où F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
   Soit $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ une base de F et $(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_p)$ une base de G. Utiliser la définition de la somme directe pour montrer que $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_p)$ est une base de E.

2. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u \circ u = u$ (on dit que u est un projecteur).

   On suppose que rang $u = p$.

   (a) On définit $G = \{x \in E \,/\, x = u(x)\}$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u = G$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$.

   (c) En déduire que $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$.

   (d) On pose $n = 5$ et $p = 3$, comment choisir une base B' de E de façon à obtenir une matrice A' associée à u qui soit diagonale ? Bien préciser la matrice A'.

   (e) En déduire toutes les valeurs propres de u et préciser leur multiplicité. Donner des vecteurs propres associés.

Exercice 3 (*barème approximatif : 8 points*) **CHANGER DE COPIE**
Soit P_2 l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on note $B = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique (on rappelle que $p_i(t) = t^i,\ i = 0, 1, 2$).
On définit l'application u pour tout $p \in P_2$ par

$$u(p) = p - \frac{1}{2} p'' p_2,$$

où p'' désigne la dérivée seconde de p.

1. Montrer que u est linéaire de P_2 dans P_2.

2. Donner une base de $\mathrm{Im}\, u$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, u$.

4. u est-elle injective ? surjective ? Justifier.

5. Déterminer la matrice A de u quand on munit P_2 de la base canonique.

6. On définit les polynômes q_0, q_1, q_2 de la façon suivante

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q_0(t) = 1,\ q_1(t) = 1 + t - t^2,\ q_2(t) = 1 + t + t^2.$$

   (a) Utiliser les déterminants pour montrer que $B' = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de P_2.

   (b) Déterminer P la matrice de passage de B dans B'.

   (c) Calculer P^{-1}.

   (d) Démontrer, dans le cas général, que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

   (e) On note A' la matrice de u quand on munit P_2 de la base canonique B'.
   Quelle relation matricielle lie A et A' ? On ne demande pas de calculer A'.

   (f) En déduire les valeurs propres de A'.