MT23 - A2021 - Test 2

NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Barème approximatif (3 ; 2 ; 5). Durée 30 minutes. Les exercices sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un paramètre réel.

1. Sans aucun calcul, dire si A est diagonalisable dans le cas $a = 1$ (justifier).
2. Calculer le rang de $(A - I)$ (on discutera en fonction de a).
3. Donner les valeurs propres de A en précisant leurs multiplicités (on discutera en fonction de a).
4. Sans calcul supplémentaire, dire s'il existe des valeurs de a pour lesquelles A est diagonalisable (justifier).
5. Dans le cas $a = 0$, utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour déterminer A^4 en fonction de A^2 et A.

Exercice 2

1. Soit X_1 et X_2 deux vecteurs orthogonaux, montrer que (X_1, X_2) est une famille libre.
2. Soit la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Q est-elle une matrice orthogonale ?

   Si oui, justifier.

   Si non, modifier la matrice pour qu'elle le soit.

Exercice 3

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On munit E d'un produit scalaire $< .,. >$.
   (a) Soit F un s.e.v. de E, donner la définition de $F^\perp$.
   (b) Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$
2. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on définit

$$< x, y >= x_1y_1 + bx_2y_2 + ax_1y_2 + cx_2y_1 \text{ où } a, b, c \text{ sont des paramètres réels.}$$

   (a) Donner la matrice A telle que $< x, y >= x^T Ay$.
   (b) Donner deux conditions nécessaires (mais non forcément suffisantes) sur les paramètres pour que cette forme soit un produit scalaire.
   (c) On pose $a = c = 1$ et $b = 2$
      i. Démontrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
      ii. Quelle est la norme associée à **ce** produit scalaire ? On ne demande pas de démontrer qu'il s'agit d'une norme.
      iii. Calculer, avec la norme ainsi définie, la norme du vecteur $(1, 1)$.
      iv. Soit $F = \text{vect} < (1, 1) >$, calculer $F^\perp$.