MT23 - A2022 - Test 1

NOM :

PRENOM :

Groupe ou horaire de TD :

Durée 30 min - Barème approximatif (3 ; 2,5 ; 4,5). Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et on note (p_0, p_1, p_2, p_3) sa base canonique (on rappelle que $p_k(t) = t^k,\ \forall t \in \mathbb{R}$).

Soit $F = \{p \in \mathcal{P}_3 / p'' = 0\}$ (où p'' désigne la dérivée seconde de p).

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_3$.
2. Déterminer une base et la dimension de F.
3. **Bonus (1pt) :** Montrer que, dans tout espace vectoriel E, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ et $\mathcal{G} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_p)$, alors :
$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \text{ est une famille libre} \Rightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$$
4. En déduire un sous-espace vectoriel G tel que $F \oplus G = \mathcal{P}_3$.

Exercice 2 On considère E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

1. Rappeler la définition d'une application linéaire ainsi que la définition du noyau de u.
2. Montrer que si u est injective alors $\mathrm{Ker}\,(u) = \{\vec{0}_E\}$.
3. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que si u est injective alors $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \ldots, u(\vec{e}_n))$ est une famille libre de F.

Exercice 3 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} u$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} u$.
4. u est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (à savoir $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$). Ecrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment elle est construite).