MT23 - A2023 - Examen médian

Durée 1h30 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice sur une copie **séparée.**
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 4,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Est-ce que le système $Ax = b$ peut admettre une unique solution ? Justifier soigneusement la réponse.
2. Résoudre en fonction de α le système $Ax = 0$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ en fonction de α.
4. Toujours en fonction de α, déduire $\mathrm{rang}(A)$.

Exercice 2 (*barème approximatif : 7,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique. Pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ de la forme $p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2$, on considère l'application $u : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$u(p) = (a_0 - a_1, a_2).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Donner l'expression de la matrice A représentant u dans les bases canoniques de $\mathcal{P}_2$ et $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, u$.
4. Déterminer $\mathrm{Im}\, u$.
5. Que peut-on en déduire sur u ?
6. Soient $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 + p_1$ et $q_2 = p_0 + p_1 + p_2$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de $\mathcal{P}_2$.
   (b) En déduire un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $\mathcal{P}_2$ (justifier soigneusement la réponse).
   (c) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
   (d) Soit le polynôme p défini par $p(t) = 5 - 4t + 3t^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
   Exprimer p en fonction de q_0, q_1 et q_2 en utilisant la question précédente.

TSVP

Exercice 3 (*barème approximatif : 8 points*) **CHANGER DE COPIE**

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on note $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{33})$ sa base canonique (on rappelle que E_{ij} a tous ses coefficients nuls sauf celui de la ligne i colonne j qui vaut 1).

On introduit les sous-espaces vectoriels F et D_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

$$F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,:\, M = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & 0 & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad D_3 = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,:\, M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} \right\}.$$

1. (a) Déterminer $\dim(F)$ et $\dim(D_3)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = F \oplus D_3$.
2. Le but de cette partie est de démontrer que *toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle peut s'écrire $M = BC - CB$, où B et $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$* (ce résultat est en fait valable pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   On définit la matrice A par

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

   et l'application g de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par

   $$g(M) = AM - MA.$$

   (a) Montrer que g est linéaire.
   (b) Calculer $g(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) Monter que $\operatorname{Im}(g) \subset F$ et que $\operatorname{Ker}(g) = D_3$.
   (d) En déduire que $\operatorname{Im}(g) = F$.
   (e) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{trace}(M) = 0$, on **admet** le résultat suivant :
   il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $N \in F$ telles que $M = P^{-1}NP$.

      i. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

      $$N = AR - RA.$$

      ii. En déduire l'existence de B et $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M = BC - CB$, où $B = P^{-1}AP$.