MT23 - A2024 - Examen médian - Corrigé

Exercice 1

Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ la base canonique de $\mathcal{P}_2$.
Soit a un nombre réel non nul fixé. On définit les polynômes q_0, q_1, q_2 de la façon suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; q_0(t) = 1, \; q_1(t) = (t-a), \; q_2(t) = (t-a)^2.$$

1. Utiliser les déterminants pour montrer que $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de $\mathcal{P}_2$.
   Correction : On calcule le déterminant de la matrice obtenue en écrivant les composantes des polynômes q_0, q_1, q_2 dans la base canonique : $q_0 = p_0, \; q_1 = -ap_0 + p_1$,
   $q_2 = a^2 p_0 - 2ap_1 + p_2$, et on obtient

$$\det(q_0, q_1, q_2) = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

   On a utilisé le fait que, la matrice étant triangulaire, le déterminant est égal au produit des termes diagonaux.
   La famille $\mathcal{C} = \{q_0, q_1, q_2\}$ est donc une base de $\mathcal{P}_2$.
2. Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$.
   Correction : La matrice P est la matrice construite précédemment : on range colonne par colonne les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ et on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer P^{-1}.
   Correction : On détermine les composantes des vecteurs p_0, p_1, p_2 dans la base $\mathcal{C}$ et on obtient P^{-1} la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. On doit résoudre un système dont la matrice est triangulaire, ce qui est immédiat :

$$\left\{\begin{array}{lllll} q_0 & = & p_0 & & \\ q_1 & = & -ap_0 & +p_1 & \\ q_2 & = & a^2 p_0 & -2ap_1 & +p_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} p_0 & = & q_0 & & \\ p_1 & = & aq_0 & +q_1 & \\ p_2 & = & a^2 q_0 & +2aq_1 & +q_2 \end{array}\right.$$

   On obtient alors

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On définit l'application u par, $\forall p \in \mathcal{P}_2$

$$u(p) = q_1 p' - p + p(a) q_0,$$

   où p' désigne la dérivée de p
   (a) Montrer que u est linéaire et que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathcal{P}_2$.

Correction : $\forall p, q \in \mathcal{P}_2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} u(p+q) & = & q_1(p+q)' - (p+q) + (p+q)(a)q_0 \\ & = & q_1p' - p + p(a)q_0 \ + \ q_1q' - q + q(a)q_0 \\ & = & u(p) + u(q) \\ u(\alpha p) & = & q_1(\alpha p)' - \alpha p + (\alpha p)(a)q_0 \\ & = & \alpha q_1 p' - \alpha p + \alpha p(a)q_0 \\ & = & \alpha u(p). \end{array}$$

Montrons de plus que $\text{Im } u \subset \mathcal{P}_2$: soit $p \in \mathcal{P}_2$, $p' \in \mathcal{P}_1$, $q_1 \in \mathcal{P}_1$ donc $q_1p' \in \mathcal{P}_2$.
D'autre part, $p(a)q_0$ est un polynôme constant, donc $q_1p' - p + p(a)q_0 \in \mathcal{P}_2$.

(b) Déterminer la matrice $\widehat{A}$ de u quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base $\mathcal{C}$. Vérifier que cette matrice est diagonale.
Correction : On constate après calculs que : $q_0' = 0, q_1' = q_0, q_2' = 2q_1$.
On a d'autre part $q_0q_1 = q_1$, $q_1q_1 = q_2$, et $q_1(a) = q_2(a) = 0$.
On obtient alors
$u(q_0) = 0 - q_0 + q_0 = 0$,
$u(q_1) = q_1q_0 - q_1 + 0 = q_1 - q_1 = 0$,
$u(q_2) = q_1(2q_1) - q_2 + 0 = q_2$.
On écrit, colonne par colonne, les composantes de $u(q_0), u(q_1), u(q_2)$ dans la base $\mathcal{C}$, d'où la matrice :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) On note A la matrice de u quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base $\mathcal{B}$.
Quelle relation matricielle lie A et $\widehat{A}$? On ne demande pas de calculer A.
Correction : On a

$$A = P\hat{A}P^{-1}.$$

5. (a) Que vaut le rang de u ? Justifier la réponse.
Correction : Le rang de u est égal à la dimension de $\text{Im } u$.
La famille $(u(q_0), u(q_1), u(q_2))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
Puisque $u(q_0) = u(q_1) = 0, u(q_2) = q_2$, la famille (q_2) est une famille génératrice de $\text{Im } u$.
Cette famille est libre (car un vecteur non nul), c'est donc une base de $\text{Im } u$ et $\text{rang } u = 1$.
On aurait pu également calculer le rang de $\hat{A}$. $\hat{A}$ possède 2 colonnes nulles et une colonne non nulle, donc le nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes est 1 et $\text{rang } u = \text{rang } \hat{A} = 1$.

(b) Déterminer une base de $\text{Ker } u$ (on pourra utiliser les questions précédentes).
Correction : En utilisant le thérème du rang, on obtient
$\dim \text{Ker } u = \dim \mathcal{P}_2 - \dim \text{Ker } u = 3 - 1 = 2$.
Les 2 vecteurs q_0 et q_1 appartiennent à $\text{Ker } u$, la famille $(q_0,\ q_1)$ est une famille libre (sous-famille d'une famille libre), c'est donc une base de $\text{Ker } u$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}, B \in \mathcal{M}_{pq}$.

1. De quels espaces vectoriels les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? (On ne demande pas de démontrer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels)

$$\text{Im } A, \ \text{Im } B, \ \text{Im } AB, \ \text{Ker } A, \ \text{Ker } B, \ \text{Ker } AB.$$

   Correction : Notons tout d'abord que $AB \in \mathcal{M}_{nq}$. On a donc :
   Im A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$.
   Im B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p1}$.
   Im AB est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n1}$.
   Ker A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p1}$.
   Ker B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{q1}$.
   Ker AB est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{q1}$.

2. (a) Quelle inclusion existe entre Ker B et Ker AB ? (Démontrer cette inclusion).
   Correction : Ker $B \subset$ Ker AB. En effet, soit $x \in \mathcal{M}_{q1}$

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } B &\Leftrightarrow Bx = 0 \\ &\Rightarrow ABx = A0 = 0 \\ &\Rightarrow x \in \text{Ker } AB. \end{aligned}$$

   (b) Quelle inclusion existe entre Im A et Im AB ? (Démontrer cette inclusion).
   Correction : Im $AB \subset$ Im A. En effet, soit $y \in \mathcal{M}_{n1}$

$$\begin{aligned} y \in \text{Im } AB &\Leftrightarrow \exists x \text{ tq } y = ABx \\ &\Rightarrow \exists x'(= Bx) \text{ tq } y = Ax' \\ &\Rightarrow y \in \text{Im } A. \end{aligned}$$

3. On suppose que Ker $A = \{0\}$.
   (a) Montrer que Ker AB = Ker B.
   Correction :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } AB &\Leftrightarrow ABx = 0 \\ &\Leftrightarrow Bx \in \text{Ker } A \\ &\Leftrightarrow Bx = 0 \quad \text{car Ker } A = \{0\} \\ &\Leftrightarrow x \in \text{Ker } B. \end{aligned}$$

   Donc Ker AB = Ker B.

   (b) En déduire une relation entre rang AB et rang B
   Correction : Le nombre de colonnes de AB et le nombre de colonnes de B vaut q donc, d'après le théorème du rang :

$$\text{rang } AB + \dim \text{Ker } AB = q,$$

$$\text{rang } B + \dim \text{Ker } B = q,$$

   or Ker AB = Ker B donc dim Ker AB = dim Ker B et on en déduit que

$$\text{rang } AB = \text{rang } B.$$

Exercice 3

Soit E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$.

1. On suppose que $f \circ g \circ f = f$

   (a) Montrer que $\forall \vec{x} \in E, \;\; \vec{x} - (g \circ f)(\vec{x}) \in \text{Ker } f$.
   Correction : $\forall \vec{x} \in E$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x} - (g \circ f)(\vec{x})) &= f(\vec{x}) - f(g \circ f(\vec{x})) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= f(\vec{x}) - (f \circ g \circ f)(\vec{x}) \\ &= f(\vec{x}) - f(\vec{x}) \quad \text{car } f = f \circ g \circ f \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Donc $\forall \vec{x} \in E, \;\; \vec{x} - (g \circ f)(\vec{x}) \in \text{Ker } f$.

   (b) En déduire que $E = \text{Ker } f + \text{Im } g$.
   Correction : $\forall \vec{x} \in E, \vec{x} = (\vec{x} - (g \circ f)(\vec{x})) + (g \circ f)(\vec{x})$,
   - $\vec{x} - (g \circ f)(\vec{x}) \in \text{Ker } f$ d'après la question précédente,
   - $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x})) \in \text{Im } g$,

   donc $\vec{x}$ est la somme d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } g$.
   On a donc $E \subset \text{Ker } f + \text{Im } g$. Or $\text{Ker } f + \text{Im } g \subset E$ par définition, d'où l'égalité.

2. On suppose de plus que $g \circ f \circ g = g$.
   Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$.
   Correction : Montrons maintenant que $\text{Ker } f \cap \text{Im } g = \{\vec{0}\}$:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \text{Ker } f \cap \text{Im } g \;&\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists \vec{y} \in F, \vec{x} = g(\vec{y}) \\ f(\vec{x}) = \vec{0} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists y \in F, \vec{x} = g(\vec{y}) \\ f(g(\vec{y})) = \vec{0} \end{cases} \\ &\Rightarrow\; \begin{cases} \exists \vec{y} \in F, \vec{x} = g(\vec{y}) \\ g(f(g(\vec{y}))) = g(\vec{0}) = \vec{0} \quad \text{car } g \text{ est linéaire} \end{cases} \end{aligned}$$

   Or $g \circ f \circ g = g$, donc $g(f(g(\vec{y}))) = g(\vec{y}) = \vec{x}$ *i.e.* $\vec{x} = \vec{0}$ et $\text{Ker } f \cap \text{Im } g = \{\vec{0}\}$.
   On a donc $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$

3. Soit p un projecteur de E, c'est à dire un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

   (a) Utiliser ce qui précède pour montrer que

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$$

   Correction : On pose $E = F$ et $f = g = p$, on a alors

$$f \circ g \circ f = p \circ p \circ p = p \circ p = p = f \;\; \text{et} \;\; g \circ f \circ g = p \circ p \circ p = p \circ p = p = g.$$

   Les hypothèses des questions 1 et 2 sont vérifiées et on a donc $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.

   (b) Soit $\vec{x} \in E$, en déduire les vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ de sa décomposition unique :
   $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, avec $\vec{x}_1 \in \text{Ker } p, \; \vec{x}_2 \in \text{Im } p$.
   Correction : On utilise ce qui précède :

$$\vec{x} = \vec{x} - (g \circ f)(\vec{x}) + (g \circ f)(\vec{x}) = \vec{x} - (p \circ p)(\vec{x}) + (p \circ p)(\vec{x}) = \vec{x} - p(\vec{x}) + p(\vec{x})$$

   D'où $\vec{x}_1 = \vec{x} - p(\vec{x})$ et $\vec{x}_2 = p(\vec{x})$: on retrouve bien sûr le résultat qui a été démontré directement dans le DM 2.

Exercice 4

Soit E et F deux espaces vectoriels, avec dim $E = p$ et dim $F = q$, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_j$ des vecteurs de E. On définit les propositions :

$$(P) \quad \mathcal{E} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_j) \text{ est une famille libre.}$$

$$(Q) \quad \mathcal{F} = (u(\vec{x}_1), u(\vec{x}_2), ..., u(\vec{x}_j)) \text{ est une famille libre.}$$

Quelle implication vraie existe entre les propositions (P) et (Q) ? Démontrer le résultat.
Correction : On a $(Q) \Rightarrow (P)$. En effet, supposons que (Q) soit vraie, $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_j\vec{x}_j = u(\vec{0}) &\Rightarrow u(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_j\vec{x}_j) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \alpha_1 u(\vec{x}_1) + \alpha_2 u(\vec{x}_2) + ... + \alpha_j u(\vec{x}_j) = \vec{0} \quad \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_j = 0 \quad \text{car } (u(\vec{x}_1), u(\vec{x}_2), ..., u(\vec{x}_j)) \text{ est libre} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{E}$ est libre et on a bien $(Q) \Rightarrow (P)$.

2. On suppose que rang $u = r$ avec

$$0 < r, \quad r < p, \quad r < q.$$

Soit $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_r)$ une base de Im u.

(a) Montrer qu'il existe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r$ appartenant à E tels que

$$u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1,\ u(\vec{e}_2) = \vec{f}_2,\ ...\ ,\ u(\vec{e}_r) = \vec{f}_r \quad \text{et} \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r) \text{ libre.}$$

Correction : Puisque $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_r$ appartiennent à Im u, alors il existe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r$ appartenant à E tels que $u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, u(\vec{e}_2) = \vec{f}_2, ..., u(\vec{e}_r) = \vec{f}_r$.
De plus, en utilisant la question précédente, puisque $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), ..., u(\vec{e}_r))$ est une famille libre, alors la famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r)$ est libre.

(b) On note k la dimension de Ker u. Soit $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ une base de Ker u.
Montrer que $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est une famille libre.
Correction : $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{e}_1 + ... + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{e'}_1 ... + \beta_k\vec{e'}_k = \vec{0} &\Rightarrow u(\alpha_1\vec{e}_1 + ... + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{e'}_1 ... + \beta_k\vec{e'}_k) = u(\vec{0}) \\ &\Rightarrow \alpha_1 u(\vec{e}_1) + ... + \alpha_r u(\vec{e}_r) + \beta_1 u(\vec{e'}_1) ... + \beta_k u(\vec{e'}_k) = \vec{0} \\ &\qquad \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &\Rightarrow \alpha_1 u(\vec{e}_1) + ... + \alpha_r u(\vec{e}_r) = \vec{0} \quad \text{car } \vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_k \in \text{Ker } u \\ &\Rightarrow \alpha_1\vec{f}_1 + ... + \alpha_r\vec{f}_r = \vec{0} \quad \text{car } u(\vec{e}_i) = f_i,\ \forall i = 1, ...r \\ &\Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0 \quad \text{car } (\vec{f}_1, ..., \vec{f}_r) \text{ base donc libre} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1\vec{e}_1 + ... + \alpha_r\vec{e}_r + \beta_1\vec{e'}_1 ... + \beta_k\vec{e'}_k = \vec{0} \\ \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0 \end{array} \right. &\Rightarrow \beta_1\vec{e'}_1 ... + \beta_k\vec{e'}_k = \vec{0} \\ &\Rightarrow \beta_1 = ... = \beta_k = 0 \quad \text{car } (\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_k) \text{ base donc libre} \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{E}$ est donc une famille libre.

(c) En déduire que $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est une base de E.
Correction : dim Im u + dim Ker u = dim $E \Leftrightarrow r + k = p$.
La famille $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est libre et contient p vecteurs, c'est donc une base de E.