MT23 - A2024 - Examen médian

Durée 1h30 – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice sur une copie **séparée.**
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 7 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ la base canonique de $\mathcal{P}_2$.
Soit a un nombre réel non nul fixé. On définit les polynômes q_0, q_1, q_2 de la façon suivante

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; q_0(t) = 1, \;\; q_1(t) = (t-a), \;\; q_2(t) = (t-a)^2.$$

1. Utiliser les déterminants pour montrer que $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de $\mathcal{P}_2$.
2. Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$.
3. Calculer P^{-1}.
4. On définit l'application u par, $\forall p \in \mathcal{P}_2$

$$u(p) = q_1 p' - p + p(a) q_0,$$

   où p' désigne la dérivée de p
   (a) Montrer que u est linéaire et que Im $u \subset \mathcal{P}_2$.
   (b) Déterminer la matrice $\widehat{A}$ de u quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base $\mathcal{C}$. Vérifier que cette matrice est diagonale.
   (c) On note A la matrice de u quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base $\mathcal{B}$.
   Quelle relation matricielle lie A et $\widehat{A}$? On ne demande pas de calculer A.
5. (a) Que vaut le rang de u ? Justifier la réponse.
   (b) Déterminer une base de Ker u (on pourra utiliser les questions précédentes).

Exercice 2 (*barème approximatif : 4,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}, B \in \mathcal{M}_{pq}$.

1. De quels espaces vectoriels les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ? (On ne demande pas de démontrer qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels)

$$\text{Im } A, \;\; \text{Im } B, \;\; \text{Im } AB, \;\; \text{Ker } A, \;\; \text{Ker } B, \;\; \text{Ker } AB.$$

2. (a) Quelle inclusion existe entre Ker B et Ker AB ? (Démontrer cette inclusion).
   (b) Quelle inclusion existe entre Im A et Im AB ? (Démontrer cette inclusion).
3. On suppose que Ker $A = \{0\}$.
   (a) Montrer que Ker $AB =$ Ker B.
   (b) En déduire une relation entre rang AB et rang B

TSVP

Exercice 3 (*barème approximatif : 4,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$.

1. On suppose que $f \circ g \circ f = f$
   (a) Montrer que $\forall \vec{x} \in E, \ \ \vec{x} - (g \circ f)(\vec{x}) \in \text{Ker } f$.
   (b) En déduire que $E = \text{Ker } f + \text{Im } g$.
2. On suppose de plus que $g \circ f \circ g = g$.
   Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$.
3. Soit p un projecteur de E, c'est à dire un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.
   (a) Utiliser ce qui précède pour montrer que
   $$E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$$
   (b) Soit $\vec{x} \in E$, en déduire les vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ de sa décomposition unique :
   $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, avec $\vec{x}_1 \in \text{Ker } p, \ \vec{x}_2 \in \text{Im } p$.

Exercice 4 (*barème approximatif : 4 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit E et F deux espaces vectoriels, avec $\dim E = p$ et $\dim F = q$, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Soit $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_j$ des vecteurs de E. On définit les propositions :
   $$(P) \quad \mathcal{E} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_j) \text{ est une famille libre.}$$
   $$(Q) \quad \mathcal{F} = (u(\vec{x}_1), u(\vec{x}_2), ..., u(\vec{x}_j)) \text{ est une famille libre.}$$
   Quelle implication vraie existe entre les propositions (P) et (Q) ? Démontrer le résultat.
2. On suppose que rang $u = r$ avec
   $$0 < r, \quad r < p, \quad r < q.$$
   Soit $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_r)$ une base de $\text{Im } u$.
   (a) Montrer qu'il existe $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r$ appartenant à E tels que
   $$u(\vec{e}_1) = \vec{f}_1, \ u(\vec{e}_2) = \vec{f}_2, \ ... \ , \ u(\vec{e}_r) = \vec{f}_r \quad \text{et} \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r) \text{ libre.}$$
   (b) On note k la dimension de $\text{Ker } u$. Soit $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ une base de $\text{Ker } u$.
   Montrer que $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est une famille libre.
   (c) En déduire que $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_r, \vec{e'}_1, \vec{e'}_2, ..., \vec{e'}_k)$ est une base de E.