MT23 - A2024 - Test 1 - Correction

Exercice 1 Soit u une application linéaire de E dans F.

1. Donner la définition de $\operatorname{Ker} u$.

   Correction : $\operatorname{Ker} u = \{\vec{x} \in E / u(x) = \vec{0}_F\}$

2. Montrer que $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel (on précisera de quel espace vectoriel).

   Correction :

   — $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ car u est linéaire donc $\vec{0}_E \in \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} u \neq \emptyset$.

   — Soient $\vec{x}$ et $\vec{y} \in \operatorname{Ker} u$, $u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) = \vec{0}_F + \vec{0}_F = \vec{0}_F$ (on a encore utilisé la linéarité de u).

   — Soient $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u$ et $\lambda \in K$, $u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) = \lambda\vec{0}_F = \vec{0}_F$ (on a encore utilisé la linéarité de u)

   $\operatorname{Ker} u$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

3. Montrer l'équivalence : u injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

   Correction : On raisonne par double implication

   $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

   Pour prouver que u est injective, on doit montrer que $u(\vec{x}) = u(\vec{y}) \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$.

$$\begin{aligned} u(\vec{x}) = u(\vec{y}) &\Rightarrow u(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{0}_F \text{ (car } u \text{ est linéaire)} \\ &\Rightarrow \vec{x}-\vec{y} \in \operatorname{Ker} u \\ &\Rightarrow \vec{x}-\vec{y} = \vec{0}_E \text{ (car } \operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}) \\ &\Rightarrow \vec{x} = \vec{y} \end{aligned}$$

   $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que u est injective.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \operatorname{Ker} u &\Rightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F \\ &\Rightarrow u(\vec{x}) = u(\vec{0}_E) \text{ (car } u \text{ est linéaire)} \\ &\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E \text{ (car } u \text{ est injective).} \end{aligned}$$

Exercice 2 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni des opérations usuelles.
On pose $\vec{v}_1 = (1,2,0)$, $\vec{v}_2 = (1,1,-1)$ et $\vec{v}_3 = (-1,1,3)$.

1. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ? Si oui le démontrer, si non donner la relation qui les lie.

   Correction :

$$\begin{aligned} \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 = \vec{0} &\Leftrightarrow \lambda_1(1,2,0) + \lambda_2(1,1,-1) + \lambda_3(-1,1,3) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& -2\lambda_3 \\ \lambda_2 &=& 3\lambda_3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

   On peut prendre par exemple $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_1 = -2$, c'est à dire $-2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$.

   La famille est donc liée.

2. On pose $F_1 = \text{vect} < \vec{v}_1 >$ et $F_2 = \text{vect} < \vec{v}_2 >$.
   (a) Calculer $F_1 \cap F_2$.
   Correction :
$$\vec{x} \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \alpha_1(1,2,0) \\ \vec{x} = \alpha_2(1,1,-1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \alpha_1(1,2,0) \\ \alpha_1(1,2,0) = \alpha_2(1,1,-1) \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \alpha_1(1,2,0) \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ 2\alpha_1 = \alpha_2 \\ 0 = \alpha_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} = \alpha_1(1,2,0) \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$
   Donc $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$.
   (b) Que peut-on alors dire de F_1 et F_2 ?
   Correction : F_1 et F_2 sont donc en somme directe dans $\mathbb{R}^3$ (ce sont deux droites vectorielles non colinéaires).

Exercice 3 On rappelle que (p_0, p_1, p_2) est la base canonique de $\mathcal{P}_2$ où $p_k(t) = t^k, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{P}_2$ définie par
$$u(x_1, x_2) = x_1 p_0 + x_2 p_1 + (x_1 - x_2)p_2 \qquad \forall \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que u est linéaire.
   Correction : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} u(\vec{x}+\vec{y}) & = & (x_1+y_1)p_0 + (x_2+y_2)p_1 + ((x_1+y_1)-(x_2+y_2))p_2 \\ & = & (x_1p_0 + x_2p_1 + (x_1-x_2)p_2) + (y_1p_0 + y_2p_1 + (y_1-y_2)p_2) \\ & = & u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \end{array}$$
$$\begin{array}{rcl} u(\lambda\vec{x}) & = & (\lambda x_1)p_0 + (\lambda x_2)p_1 + (\lambda x_1 - \lambda x_2)p_2 \\ & = & \lambda(x_1p_0 + x_2p_1 + (x_1-x_2)p_2 \\ & = & \lambda u(\vec{x}) \end{array}$$
   Donc u est bien linéaire.
2. Sans calcul, dire si u peut être bijective (justifier la réponse).
   Correction : $\dim \mathbb{R}^2 = 2 \neq \dim \mathcal{P}_2 = 3$ donc les deux espaces vectoriels ne sont pas isomorphes et il n'existe pas d'application bijective entre les 2.
3. Déterminer $\text{Ker}\, u$.
   Correction :
$$\begin{array}{rcl} \vec{x} \in \text{Ker}\, u & \Leftrightarrow & u(\vec{x}) = 0_{\mathcal{P}_2} \\ & \Leftrightarrow & x_1p_0 + x_2p_1 + (x_1-x_2)p_2 = 0_{\mathcal{P}_2} \\ & \Leftrightarrow & x_1 = x_2 = 0 \quad \text{car } (p_0,p_1,p_2) \text{ est une famille libre} \\ & \Leftrightarrow & \vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^2} \end{array}$$
   Donc $\text{Ker}\, u = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$.
4. u est-elle injective ?
   Correction : On vient de montrer que $\text{Ker}\, u = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^2}\}$, ce qui équivaut à montrer que u est injective (cf. exercice 1 question 3).

5. Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im} u$.

   Correction : On sait que l'image par u d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ est génératrice de $\operatorname{Im} u$
   $u(1,0) = p_0 + p_2$ et $u(0,1) = p_1 - p_2$, donc $\operatorname{Im} u = \text{vect} < p_0 + p_2, p_1 - p_2 >$.
   Il reste à montrer que cette famille est libre :

$$\begin{aligned} \lambda_1(p_0+p_2) + \lambda_2(p_1-p_2) = 0_{\mathcal{P}_2} &\Leftrightarrow \lambda_1 p_0 + \lambda_2 p_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)p_2 = 0_{\mathcal{P}_2} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \text{car } (p_0, p_1, p_2) \text{ est une famille libre} \end{aligned}$$

   On pouvait aussi utiliser le fait que u est injective donc l'image d'une famille libre est une famille libre.
   La famille $(p_0 + p_2, p_1 - p_2)$ est donc une base de $\operatorname{Im} u$ et $\dim \operatorname{Im} u = 2$.

6. Ecrire la matrice A représentant l'application u dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{P}_2$ (on expliquera comment A est construite).

   Correction : Si on note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on sait que
   $u(\vec{e}_1) = p_0 + p_2$ et $u(\vec{e}_2) = p_1 - p_2$.
   On obtient alors

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{array}$$