MT23 - A2022 - Test 2 - Correction

Exercice 1 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de M et en déduire que M est inversible.
2. Calculer les vecteurs propres de M.
3. Exprimer M^3 en fonction de M et I.
4. Exprimer M^{-1} en fonction de M et I.

Correction

1. On a

$$\det(M - \lambda I_2) = (2-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

   On en déduit que 1 et 3 sont valeurs propres simples de M (donc M est diagonalisable). Ainsi $\det M = 1 \times 3 = 3 \neq 0$ donc M est inversible (ou $\mathrm{Ker}\,(M) = \{0\}$).

2. Soit Y_1 un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1, on a

$$(M - I)Y_1 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y_1 = -y_2 \Leftrightarrow Y_1 = y_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Donc $Y_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
   Soit Y_2 un vecteur propre de M associé à la valeur propre 3, on a

$$(M - 3I)Y_2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y_1 = y_2 \Leftrightarrow Y_2 = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Donc $Y_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathbb{R}^*$.

3. D'après la question 1, $\pi_M(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a alors

$$\begin{aligned} \pi_M(M) = 0 &\Leftrightarrow M^2 - 4M + 3I = 0 \\ &\Leftrightarrow M^2 = 4M - 3I \\ &\Rightarrow M^3 = 4M^2 - 3M \\ &\Rightarrow M^3 = 4(4M - 3I) - 3M \\ &\Rightarrow M^3 = 13M - 12I. \end{aligned}$$

4. Toujours d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$M^2 - 4M + 3I = 0 \Rightarrow I = \frac{1}{3}(4M - M^2) \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{3}(4I - M).$$

Exercice 2 Soit $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on cherche $x \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $Ax = b \quad (S)$.

1. De quels espaces vectoriels $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Est-ce que le système (S) peut admettre une solution unique ? Justifier soigneusement la réponse.
3. Peut-on avoir une solution pour tout $b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$? Si oui, à quelle condition ? Justifier soigneusement la réponse.

Correction

1. $\operatorname{Im} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Ker} A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
2. Non car, d'après le théorème du rang, nous avons $\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \operatorname{rang}(A) = 4$.
   Or $\operatorname{rang}(A) \leq 3$ donc nécessairement $\dim(\operatorname{Ker}(A)) \geq 1$. La solution, si elle existe, n'est donc pas unique.
   En effet, $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ donc $\exists\, x^* \neq 0 \in \operatorname{Ker} A$ tel que $Ax^* = 0$. Soit x solution de (S), alors $A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b$ donc $x + x^*$ est encore solution de (S).
3. Oui, si $\operatorname{rang}(A) = 3$. En effet, sachant que $\operatorname{rang} A \leq 3$ et que $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut tout à fait avoir $\operatorname{rang} A = 3$ et $\operatorname{Im} A = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc, si $\operatorname{rang} A = 3$, $\forall b \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $b \in \operatorname{Im} A$ et donc (S) admet une infinité de solutions.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Donner la définition d'un produit scalaire.
2. Donner la définition de l'orthogonal de F.

Correction

1. On appelle produit scalaire dans un espace vectoriel réel E, une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ notée $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ et vérifiant les propriétés suivantes :
   — elle est bilinéaire : $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ et $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
   $$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y_1 \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y_1 \rangle,$$
   $$\langle x_1, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x_1, y_2 \rangle,$$
   — elle est symétrique : $\forall x, y \in E$ on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
   — elle est définie positive :
   $$\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$
2. On note $F^\perp$ l'orthogonal de F avec
   $$F^\perp = \{x \in E \ / \ \forall y \in F \ \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Exercice 4 Soit $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. On suppose que B a deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. Soit (Y_1, Y_2) une famille libre de V_{λ_1} et Y_3 un vecteur non nul de V_{λ_2}.

1. Montrer que (Y_1, Y_3) est une famille libre.
2. Est-ce que $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ est un vecteur propre ?
3. Montrer que (Y_1, Y_2, Y_3) est une famille libre.
4. On définit l'application linéaire u de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $u(X) = BX$.
   (a) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base canonique ? Justifier le résultat.
   (b) Quelle est la matrice de u quand on munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de la base(Y_1, Y_2, Y_3) ? Justifier le résultat.

Correction

1. Soit α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_3 = 0 \quad (*) \\ \Rightarrow & (B - \lambda_1 I)(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_3) = (B - \lambda_1 I)0 = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_1 (B - \lambda_1 I) Y_1 + \alpha_2 (B - \lambda_1 I) Y_3 = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_2 (B - \lambda_1 I) Y_3 = 0 \quad \text{car } (B - \lambda_1 I) Y_1 = 0 \text{ puisque } Y_1 \in V_{\lambda_1} \\ \Rightarrow & \alpha_2 \lambda_2 Y_3 - \alpha_2 \lambda_1 Y_3 = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) Y_3 = 0 \quad \text{car } BY_3 = \lambda_2 Y_3 \text{ puisque } Y_3 \in V_{\lambda_2} \\ \Rightarrow & \alpha_2 = 0 \quad \text{car } Y_3 \neq 0 \text{ (vecteur propre) et } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \Rightarrow & \alpha_1 Y_1 = 0 \quad \text{d'après } (*) \\ \Rightarrow & \alpha_1 = 0 \quad \text{car } Y_1 \neq 0 \text{ (c'est un vecteur propre)} \end{array}$$

$\boxed{\textbf{ou}}$

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_3 = 0 \quad (*) \\ \Rightarrow & B(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_3) = B0 = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_1 BY_1 + \alpha_2 BY_3 = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_1 \lambda_1 Y_1 + \alpha_2 \lambda_2 Y_3 = 0 \quad \text{car } (\lambda_1, Y_1) \text{ et } (\lambda_2, Y_3) \text{ couples propres de } B \\ \Rightarrow & \lambda_1 \alpha_1 Y_1 - \lambda_2 \alpha_1 Y_1 = 0 \quad \text{car } \alpha_2 Y_3 = -\alpha_1 Y_1 \text{ d'après } (*) \\ \Rightarrow & \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) Y_1 = 0 \\ \Rightarrow & \alpha_1 = 0 \quad \text{car } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ et } Y_1 \neq 0 \\ \Rightarrow & \alpha_2 Y_3 = 0 \quad \text{d'après } (*) \\ \Rightarrow & \alpha_2 = 0 \quad \text{car } Y_3 \neq 0 \end{array}$$

2. $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \in V_{\lambda_1}$ car V_{λ_1} est un sous-espace vectoriel, donc
   — si $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \neq 0$, c'est un vecteur propre associé à λ_1,
   — si $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = 0$, ce n'en est pas un.
3. On considère α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3 = 0. \qquad (**)$$

   Si $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \neq 0$, c'est un vecteur propre associé à λ_1 d'après la question précédente.
   Dans ce cas, d'après la question 1, la famille $(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2, Y_3)$ est libre et
   $1.(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) + \alpha_3 Y_3 = 0 \Leftrightarrow (**)$ est impossible.
   Donc $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = 0$. Comme c'est une famille libre, on obtient $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et
   $(**) \Rightarrow \alpha_3 Y_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$ car $Y_3 \neq 0$

$\boxed{\textbf{ou}}$

D'après la question précédente, comme $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ est un élément de V_{λ_1}, si on multiplie $(**)$ par $(B - \lambda_1 I)$, alors on déduit de la question 1 que $\alpha_3 = 0$. L'égalité $(**)$ se réduit alors à

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = 0.$$

Or (Y_1, Y_2) est une famille libre de V_{λ_1} donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
La famille (Y_1, Y_2, Y_3) est donc une famille libre.

4. (a) Dans ce cas la matrice de u est B. En effet, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a

$$u(e_1) = Be_1 = B_1, \quad u(e_2) = Be_2 = B_2, \quad u(e_3) = Be_3 = B_3,$$

où B_i désigne la colonne i de B.

(b) Dans ce cas la matrice de u est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

En effet, nous avons

$$u(Y_1) = BY_1 = \lambda_1 Y_1, \quad u(Y_1) = BY_2 = \lambda_1 Y_2, \quad u(Y_3) = BY_3 = \lambda_2 Y_3.$$