MT23 - A2023 - Examen final

Durée 2h – Les documents et machines à calculer sont interdits.

Rédigez chaque exercice sur une copie **séparée.**
Justifiez soigneusement toutes vos réponses.

Exercice 1 (*barème approximatif : 7 points*) **CHANGER DE COPIE**

On suppose $n \geq 2$. Soient U et V sont 2 vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note $\boldsymbol{\gamma = U^T V}$.
On note $I \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice identité et on définit la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ par

$$A = 2I + VU^T.$$

1. (a) Que vaut rang $(A - 2I)$? Justifier soigneusement le résultat.
   (b) Que vaut trace (A) ?
   (On rappelle que trace $(MN) =$ trace (NM) pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.)
   (c) En déduire toutes les valeurs propres de A et leur multiplicité. Discuter en fonction de γ.
   (d) A est-elle diagonalisable ? Discuter en fonction de γ.
2. Montrer que V est vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?
3. (a) Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^T Y = 0$. Que vaut AY ?
   (b) Soit $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^T Z = 1$. Que vaut AZ ?
4. On suppose à partir de maintenant que $\boldsymbol{n = 3}$ et $\boldsymbol{\gamma = 0}$.
   Y et Z sont deux vecteurs ayant les propriétés des questions précédentes.
   (a) On suppose que (Y, V) est une famille libre, montrer que la famille (Y, V, Z) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) On pose $P = (Y \ V \ Z)$, montrer que $AP = PT$ où T est une matrice triangulaire que l'on déterminera.
   (c) On veut résoudre le système d'équations différentielles linéaires

   $$(I) \quad x' = Ax$$

   i. Montrer que (I) peut se mettre sous la forme

   $$(II) \quad \begin{cases} z_1' = 2z_1 \\ z_2' = 2z_2 + z_3 \\ z_3' = 2z_3 \end{cases}$$

   ii. Résoudre (II).

Exercice 2 (*barème approximatif : 3,5 points*) **CHANGER DE COPIE**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 = \alpha A$ où α est un réel non nul.
On suppose que dim Ker $A = p$, avec $0 < p < n$.

1. Montrer que Ker $A \oplus$ Im $A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une base de Ker A et $(\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_q')$ une base de Im A.
   Préciser q et montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_q')$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que Ker A et Im A sont des sous-espaces propres de A (on précisera les valeurs propres associées).
4. En déduire que la matrice A est diagonalisable.

Exercice 3 (*barème approximatif : 7 points*) **CHANGER DE COPIE**

On considère dans cet exercice la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}).$$

1. (a) Sans la calculer, montrer que la matrice $A^\top A$ est symétrique définie positive. En déduire que $A^\top A$ admet deux valeurs propres strictement positives λ_1 et λ_2.
   (b) Calculer $A^\top A$ et déterminer λ_1 et λ_2 ses valeurs propres. On choisit par **convention** $\lambda_1 > \lambda_2$.
   (c) Déterminer une BON de vecteurs propres (V_1, V_2) de $A^\top A$ où $V_i \in \text{Ker}\ (A^\top A - \lambda_i I)$ $i = 1, 2$.
2. On définit à présent la famille (U_1, U_2) de $\mathbb{R}^3$ de la manière suivante

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} AV_i, \quad i = 1, 2.$$

   (a) Démontrer que la famille (U_1, U_2) est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Construire un vecteur $U_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille (U_1, U_2, U_3) soit orthonormée.
   (c) En déduire que la famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Dans la suite on note $V = (V_1\ V_2) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $U = (U_1\ U_2\ U_3) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.
   (a) Déduire des questions précédentes que les matrices V et U sont orthogonales.
   (b) Déterminer les coefficients de la matrice $\Sigma \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, contenant $\sqrt{\lambda_1}$ et $\sqrt{\lambda_2}$ et vérifiant la relation

$$A = U\Sigma V^\top.$$

   Cette décomposition de la matrice A est appelée décomposition en valeurs singulières.

Exercice 4 (*barème approximatif : 4 points*) **CHANGER DE COPIE**

On munit $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ du produit scalaire usuel. Soient x et y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question on suppose que la famille (x, y) est libre.
   (a) Donner les formules permettant de construire, à partir de (x, y), une famille orthonormale (e_1, e_2).
   (b) En déduire les relations suivantes $x = \langle x, e_1\rangle e_1$ et $y = \langle y, e_1\rangle e_1 + \langle y, e_2\rangle e_2$.
   (c) En notant $\mu_0 = \langle x, e_1\rangle$, $\mu_1 = \langle y, e_1\rangle$ et $\mu_2 = \langle y, e_2\rangle$, démontrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée par x et y est équivalente à la relation :

$$\mu_1^2 \leq \mu_1^2 + \mu_2^2$$

2. En déduire que si la famille (x, y) est libre alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est stricte.
3. Déterminer sous quelle condition sur x et y l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité.