MT23 - A2020 - Examen médian - Correction

Exercice 1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{33}$ et $b \in \mathcal{M}_{31}$, on cherche à résoudre le système $Ax = b \quad (*)$.
   (a) Existe-t-il une condition nécessaire et suffisante pour que le système $(*)$ ait une solution $\forall b \in \mathcal{M}_{31}$? Justifier soigneusement la réponse.
   Correction : Oui, rang $A = 3$. En effet :
   $(*)$ admet une solution $\forall\ b \in \mathcal{M}_{31} \Leftrightarrow \text{Im } A = \mathcal{M}_{31} \Leftrightarrow \text{rang } A = 3$
   Remarque : rang $A = 3 \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ inversible.
   (b) Existe-t-il une condition nécessaire et suffisante pour que le système $(*)$ ait une solution unique ? Justifier soigneusement la réponse.
   Correction : Oui, A inversible. En effet :
   — Si A est inversible, $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$. On a bien une unique solution.
   — Sinon, Ker $A \neq \{0\}$ donc $\exists\ x^* \neq 0$ tel que $Ax^* = 0$.
   Si x tel que $Ax = b$ alors $A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b$ donc $x + x*$ est encore solution.
2. On définit :

$$C_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est un paramètre réel.}$$

   En discutant suivant les valeurs de α, répondre aux questions suivantes :
   (a) Déterminer le rang de C_α.
   Correction : On détermine le rang à l'aide des déterminants :
   $$\det C_\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & \alpha+1 \end{vmatrix} = 6 - 3\alpha = 3(2-\alpha).$$
   — Si $\alpha \neq 2$, $\det C_\alpha \neq 0$ donc rang $A = 3$.
   — Si $\alpha = 2$, $\det C_\alpha = 0$ donc rang $A < 3$. On peut extraire une matrice 2×2 inversible :
   $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc rang $A = 2$.
   (b) Déterminer Ker C_α.
   Correction : On utilise la méthode de Gauss (on peut échanger les 2 premières équations) :

$$C_\alpha x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 0 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = 0 \\ & 3x_2 & +(\alpha+1)x_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 0 \\ & -3x_2 & -3x_3 & = 0 \\ & & (\alpha-2)x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

   Donc
   — Si $\alpha \neq 2$, $x_3 = x_2 = x_1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et Ker $A = \{0\}$.
   — Si $\alpha = 2$, on obtient la solution

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = x_3 \\ x_2 & = -x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et Ker } A = \text{vect} < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} > .$$

   Remarque : on pouvait aussi utiliser directement le résultat de la question 1 dans le cas $\alpha = 2$: rang $A = 3 \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\}$.

(c) Déterminer une base de Im C_α.

Correction :

— Si $\alpha \neq 2$, rang $C_\alpha = 3$, donc Im $C_\alpha = \mathcal{M}_{31}$. On peut donc choisir, par exemple, la base canonique : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de Im C_α..

— Si $\alpha = 2$, dim Im C_α = rang $C_\alpha = 2$. On sait que les colonnes de C_α sont génératrices de Im C_α. Les deux premières colonnes de C_α appartiennent à Im C_α, elles forment une famille libre (non colinéaires), elles constituent donc une base.
$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc une base de Im C_2.

Remarque : une autre méthode, plus longue, consiste à caractériser les $y \in$ Im C_α, c'est à dire à trouver une(des) condition(s) éventuelle(s) sur y pour que le système $C_\alpha x = y$ admette une solution x. Après une résolution similaire à celle effectuée dans la question précédente, on trouve que :

— pour $\alpha \neq 2$, on a une solution pour tout y.

— pour $\alpha = 2$, on a une solution si et seulement si $y_1 - y_2 + y_3 = 0$.

Dans les 2 cas, on en déduit une base de Im C_α très simplement.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. On suppose que $E = F \oplus G$ où F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
Soit $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_q)$ une base de F et $(\vec{g}_1, ..., \vec{g}_p)$ une base de G. Utiliser la définition de la somme directe pour montrer que $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_q, \vec{g}_1, ..., \vec{g}_p)$ est une base de E.
Correction : $E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$
Puisque $E = F + G$, $\forall\, x \in E, \exists\, y \in F, \exists\, z \in G, x = y + z$.
Puisque $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_q)$ est une base de F, $y = \sum_{i=1}^{q} y_i \vec{f}_i$.
Puisque $(\vec{g}_1, ..., \vec{g}_p)$ est une base de G, $z = \sum_{j=1}^{p} z_j \vec{g}_j$.
Donc $x = \sum_{i=1}^{q} y_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{p} z_j \vec{g}_j$. De plus, tous les vecteurs f_i et g_j appartiennent à E, donc la famille $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_q, \vec{g}_1, ..., \vec{g}_p)$ est génératrice de E.
Montrons que la famille est libre :
$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{f}_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \vec{g}_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{f}_i = -\sum_{j=1}^{p} \beta_j \vec{g}_j$
Or le terme de gauche appartient à F et le terme de droite appartient à G. Ce terme appartient donc à l'intersection $F \cap G$, donc ce terme est nul.
On a donc $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{f}_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{p} \beta_j \vec{g}_j = 0$.
On utilise le fait que les familles $(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_q)$ et $(\vec{g}_1, ..., \vec{g}_p)$ sont libres (bases) et on en déduit que $\alpha_1 = ... = \alpha_q = \beta_1 = ... = \beta_p = 0$.
Ce qui termine la démonstration.

2. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u \circ u = u$ (on dit que u est un projecteur).

On suppose que rang $u = p$.

(a) On définit $G = \{\vec{x} \in E / \vec{x} = u(\vec{x})\}$. Montrer que Im $u = G$.
Correction : On raisonne par double inclusion :
Si $\vec{x}$ appartient à G, alors $\vec{x}$ est l'image de $\vec{x}$, donc $\vec{x} \in$ Im u. Donc $G \subset$ Im u.
Montrons l'autre inclusion : $\vec{x} \in$ Im $u \Leftrightarrow \exists\, \vec{x}' \in E, \vec{x} = u(\vec{x}')$.
On a donc $u(\vec{x}) = u \circ u(\vec{x}') = u(\vec{x}') = \vec{x}$ d'où $\vec{x} \in G$.

(b) Montrer que Ker $u \cap$ Im $u = \{0\}$.
Correction : On peut utiliser la question précédente :
$\vec{x} \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u \Leftrightarrow \vec{x} \in \text{Ker } u \cap G \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(\vec{x}) = 0 \\ \vec{x} = u(\vec{x}) \end{array} \right. \Leftrightarrow \vec{x} = 0.$

(c) En déduire que $E =$ Ker $u \oplus$ Im u.
Correction : On sait que dim $E =$ dim Ker $u +$ dim Im u.
On vient de démontrer que Ker $u \cap$ Im $u = \{0\}$. Ces deux propositions sont équivalentes à $E =$ Ker $u \oplus$ Im u.

(d) On pose $n = 5$ et $p = 3$, comment choisir une base $\mathcal{B}'$ de E de façon à obtenir une matrice A' associée à u qui soit diagonale ? Bien préciser la matrice A'.
Correction : dim Im $u = 3$ donc dim Ker $u = 2$.
On choisit $\mathcal{B}_1 = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$ une base de Ker u et $\mathcal{B}_2 = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ une base de Im $u = G$.
D'après la question 1, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de E.
On a $u(\vec{f_i}) = 0, i = 1, 2$ et $u(\vec{g}_j) = \vec{g}_j, j = 1, 2, 3$ (en effet, $\vec{f_i} \in$ Ker u et $\vec{g}_j \in G$).
On obtient donc la matrice A' :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) En déduire toutes les valeurs propres de u et préciser leur multiplicité. Donner des vecteurs propres associés.
Correction : La matrice A' est une matrice diagonale donc ses valeurs propres sont ses termes diagonaux :
0 est valeur propre double et 1 est valeur propre triple.
On sait que $u(\vec{f_i}) = 0 = 0.\vec{f_i},\ i = 1, 2$, donc $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ sont vecteurs propres associés à 0.
De même, on sait que $u(\vec{g}_j) = \vec{g}_j, i = 1, 2, 3$, donc $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ et $\vec{g}_3$ sont vecteurs propres associés à 1.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ; on note $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$ sa base canonique (on rappelle que $p_i(t) = t^i,\ i = 0, 1, 2$).
On définit l'application u pour tout $p \in \mathcal{P}_2$ par

$$u(p) = p - \frac{1}{2} p'' p_2,$$

où p'' désigne la dérivée seconde de p.

1. Montrer que u est linéaire de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathcal{P}_2$.

Correction :

$$\begin{aligned}
u(p+q) &= (p+q)-\frac{1}{2}(p+q)''p_2 = (p+q)-\frac{1}{2}(p''+q'')p_2 = (p-\frac{1}{2}p''p_2)+(q-\frac{1}{2}q''p_2) = u(p)+u(q) \\
u(\lambda p) &= (\lambda p)-\frac{1}{2}(\lambda p)''p_2 = \lambda p-\frac{1}{2}\lambda p''p_2 = \lambda\left(p-\frac{1}{2}p''p_2\right) = \lambda u(p).
\end{aligned}$$

u est donc bien linéaire.
Montrons de plus que Im $u \subset \mathcal{P}_2$: soit $p \in \mathcal{P}_2$, $p'' \in \mathcal{P}_0$ et $p_2 \in \mathcal{P}_2$ donc $p''p_2 \in \mathcal{P}_2$ et $u(p) = p - \frac{1}{2}p''p_2 \in \mathcal{P}_2$.
On peut aussi calculer $u(p)$ pour un polynôme quelconque de $\mathcal{P}_2$:
soit $p = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$,

$$\begin{aligned}
u(p) &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 - \frac{1}{2}(\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)''p_2 \\
&= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 - \frac{1}{2}(2\alpha_2 p_0)p_2 \\
&= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 - \frac{1}{2}2\alpha_2 p_2 \\
&= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1.
\end{aligned}$$

Ce qui termine de démontrer le résultat.

2. Donner une base de Im u.
Correction : Im u est engendré par $u(p_0)$, $u(p_1)$ et $u(p_2)$:

$$\begin{aligned}
u(p_0) &= p_0 - \frac{1}{2}p_0''p_2 = p_0, \\
u(p_1) &= p_1 - \frac{1}{2}p_1''p_2 = p_1, \\
u(p_2) &= p_2 - \frac{1}{2}p_2''p_2 = p_2 - \frac{1}{2}2p_0p_2 = p_2 - p_2 = 0.
\end{aligned}$$

(p_0, p_1) est une famille libre, c'est donc une base de Im u.

3. Déterminer une base de Ker u.
Correction :

$$\begin{aligned}
p = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \in \text{Ker } u &\Leftrightarrow p - \frac{1}{2}p''p_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 = 0 \quad \text{(d'après la question 1)} \\
&\Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0 \quad \text{(car } (p_0,p_1) \text{ est une famille libre)} \\
&\Leftrightarrow p = \alpha p_2
\end{aligned}$$

$p_2 \in$ Ker u, c'est donc une famille génératrice. Le vecteur est non nul, c'est une famille libre.
D'où (p_2) est une base de Ker u.

4. u est-elle injective ? surjective ? Justifier.
Correction : On a Ker $u \neq \{0\}$ donc u n'est pas injective.
On a Im $u \neq \mathcal{P}_2$ donc u n'est pas surjective.

5. Déterminer la matrice A de u quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base canonique.
Correction : On obtient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. On définit les polynômes q_0, q_1, q_2 de la façon suivante

$$\forall t \in \mathbb{R},\ q_0(t) = 1,\ q_1(t) = 1 + t - t^2,\ q_2(t) = 1 + t + t^2.$$

Correction :

(a) Utiliser les déterminants pour montrer que $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, q_2)$ est une base de $\mathcal{P}_2$.
Correction : On calcule le déterminant de la matrice obtenue en écrivant les composantes des polynômes q_0, q_1, q_2 dans la base canonique, et on obtient :

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

La famille $\mathcal{B}' = (q_0, q_1, q_2)$ est donc une base de $\mathcal{P}_2$.

(b) Déterminer P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.
Correction : La matrice P est la matrice construite précédemment, on range colonne par colonne les composantes des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. On a bien sûr :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculer P^{-1}.
Correction : Pour obtenir P^{-1}, on résout $Px = y$ et on obtient $x = P^{-1}y$.
Ou alors on détermine les composantes des vecteurs p_0, p_1, p_2 dans la base $\mathcal{B}'$: on obtient Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et $Q = P^{-1}$.
Par exemple, avec la 2ème méthode :

$$\left\{\begin{array}{lllll} q_0 & = & p_0 & & \\ q_1 & = & p_0 & +p_1 & -p_2 \\ q_2 & = & p_0 & +p_1 & +p_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} p_0 & = & q_0 & & \\ q_1 & = & p_0 & +p_1 & -p_2 \\ q_1 + q_2 & = & 2p_0 & +2p_1 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} p_0 & = & q_0 & & \\ p_2 & = & & -\frac{1}{2}q_1 & +\frac{1}{2}q_2 \\ p_1 & = & -q_0 & +\frac{1}{2}q_1 & +\frac{1}{2}q_2 \end{array}\right.$$

On obtient

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(d) Démontrer, dans le cas général, que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
Correction : B et B' sont semblables $\Leftrightarrow$ il existe P inversible telle que $B = PB'P^{-1}$.
Le polynôme caractéristique d'une matrice B est égal à $\pi_B(\lambda) = \det(\lambda I - B)$.
$\det(\lambda I - B) = \det(P(\lambda I)P^{-1} - PB'P^{-1}) = \det(P(\lambda I - B')P^{-1}) = \det(P)\det(\lambda I - B')\det(P^{-1})$
Or $\det(P^{-1}) = (\det(P))^{-1}$, donc $\pi_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - B') = \pi_{B'}(\lambda)$.

(e) On note A' la matrice de u quand on munit $\mathcal{P}_2$ de la base canonique $\mathcal{B}'$.
Quelle relation matricielle lie A et A' ? On ne demande pas de calculer A'.
Correction : On a $A' = P^{-1}AP$,
où P et P^{-1} sont les matrices calculées dans les questions (b) et (c).

(f) En déduire les valeurs propres de A'.
Correction : Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique donc même valeurs propres.
La matrice A étant diagonale, ses valeurs propres sont sur sa diagonale.
D'où : 1 est valeur propre double et 0 est valeur propre simple.