Corrigé Médian MT23 - A21

Exercice 1

1. $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \iff u(\vec{x}) = \vec{0} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \iff \vec{x} = \vec{0}$

Donc $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}\}$ et u est injective
u est un endomorphisme donc u injective $\iff$ u bijective

2. $\det(\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc $(\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3. $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(\vec{e_1}) & u(\vec{e_2}) & u(\vec{e_3}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{array}$ $\quad$ u bijective $\iff$ A inversible

4. $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A'_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} A_{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} \iff A' = P^{-1} A P$

Calcul de P^{-1} :
$Px = y \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_2 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = -y_3 \\ x_3 = y_2 + y_3 \end{cases}$

$\iff x = P^{-1} y$

D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

D'où $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. (a) D'après A', $u(\vec{e'_1}) = 2\vec{e'_1}$
$u(\vec{e'_2}) = \vec{e'_2}$
$u(\vec{e'_3}) = \vec{e'_2} + \vec{e'_3}$

(b) D'après la question précédente, on a 2 couples propres : $(2, \vec{e'_1})$ et $(1, \vec{e'_2})$

Exercice 2

1. (a) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ donc $\operatorname{rang} B < 3$

On prend une matrice extraite 2×2, par exemple
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\operatorname{rang} B = 2$

(b) $\dim \operatorname{Ker} B + \operatorname{rang} B =$ nb colonnes de B
d'où $\dim \operatorname{Ker} B = 2$

(c) $\dim \operatorname{Ker} B \neq 0$ donc $\operatorname{Ker}(A - I) \neq \{0\}$
donc 1 est valeur propre de A

(d) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Toutes les colonnes sont liées et une colonne est non nulle donc $\operatorname{rang} B^2 = 1$

D'où $\dim \operatorname{Ker} B^2 = 2$

2. (a) $x \in \operatorname{Ker} B \iff Bx = 0$

$\implies B^2 x = B0 = 0$

$\implies x \in \operatorname{Ker} B^2$

donc $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} B^2$

De plus, $\dim \operatorname{Ker} B = 1 < \dim \operatorname{Ker} B^2 = 2$

donc l'inclusion est stricte

(b) $y \in \operatorname{Im} B^2 \iff \exists x \in \mathcal{M}_{3,1}$ tq $y = B^2 x$

$\iff$ ______ $y = B.\underbrace{Bx}_{z}$

$\implies \exists z \in \mathcal{M}_{3,1}$ tq $y = Bz$

$\implies y \in \operatorname{Im} B$

donc $\operatorname{Im} B^2 \subset \operatorname{Im} B$

De plus, $\dim \operatorname{Im} B^2 = 1 < \dim \operatorname{Im} B = 2$

donc l'inclusion est stricte

(c) • $\operatorname{Im} B^2 = \operatorname{vect} < \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} > = \operatorname{vect} < \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} >$

C'est un vecteur non nul donc libre et $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Im} B^2$

• $x \in \operatorname{Ker} B^2 \iff B^2 x = 0$

$\iff x_1 + x_3 = 0$

$\iff x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-x_1\end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\in \operatorname{Ker} u$ $\quad \in \operatorname{Ker} u$

Ces 2 vecteurs sont non colinéaires, ils forment donc une base de Ker B2

(d) On a $\dim \operatorname{Im} B^2 + \dim \operatorname{Ker} B^2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Pour avoir $\operatorname{Im} B^2 \oplus \operatorname{Ker} B^2 = \mathbb{R}^3$, il reste à montrer que $\operatorname{Im} B^2 \cap \operatorname{Ker} B^2 = \{0\}$:

$x \in \operatorname{Ker} B^2 \cap \operatorname{Im} B^2 \iff x = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\implies \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc c'est une base, donc libre

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0 \implies x = 0$

Exercice 3

1. (a) $b \in \operatorname{Im} A \iff \exists x \in \mathcal{M}_{p,1}$ tq $Ax = b$

On a : $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{M}_{n,1}$

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ $x \in \operatorname{Ker} A \iff Ax = 0$

or $A0 = 0$

Comme la solution est unique, on a $x = 0$

d'où $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit x et x' tq $Ax = b$ et $Ax' = b$

On a donc $A(x - x') = 0$ i.e. $x - x' \in \operatorname{Ker} A$

Or $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ donc $x - x' = 0$ i.e. $x = x'$

2. (a) $\operatorname{Im} A \subset \mathcal{M}_{4,1}$, or $\operatorname{rang} A + \dim \operatorname{Ker} A = 3$

donc $\dim \operatorname{Im} A \leq 3$ i.e. $\dim \operatorname{Im} A < \dim \mathcal{M}_{4,1}$

On aura donc toujours une inclusion stricte

et $\exists b \in \mathcal{M}_{4,1}$ tq $b \notin \operatorname{Im} A$

(b) $Ax = b$ admet une unique solution $\iff b \in \operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rang} A = 3$

En effet, $Ax = b$ admet une solution $\iff b \in \operatorname{Im} A$

Et, d'après 1 (b), si $b \in \operatorname{Im} A$,

$Ax = b$ admet une unique solution $\iff \operatorname{Ker} A = \{0\}$

$\iff \operatorname{rang} A = 3$

(c) $Ax = b$ admet une infinité de solutions $\iff b \in \operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rang} A < 3$

On a toujours $Ax = b$ admet une solution $\iff b \in \operatorname{Im} A$

$\operatorname{rang} A < 3 \iff \operatorname{Ker} A \neq \{0\} \iff \exists x^* \neq 0$ tq $Ax^* = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\exists x \neq x'$ tq $Ax = b$ et $Ax' = b \implies x - x' \in \operatorname{Ker} A$

Or $x - x' \neq 0$ donc $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit x tq $Ax = b$. $\exists x^* \neq 0$ tq $Ax^* = 0$

donc $A(x + x^*) = Ax + Ax^* = b$

i.e. $x + x^*$ est solution

C'est vrai $\forall x^* \neq 0 \in \operatorname{Ker} A$ donc infinité de solutions.

3. (a) $Ax = 0 \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \iff x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ donc d'après 2(c), il suffit de choisir un $b \in \operatorname{Im} A$.
On peut prendre par exemple $b = A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ donc c'est impossible d'après 1(b).