MT23 - A2022 - Test 1 - Correction

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et on note (p_0, p_1, p_2, p_3) sa base canonique.
Soit $F = \{p \in \mathcal{P}_3 / p'' = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_3$.
2. Donner une base et la dimension de F.
3. **Bonus (1pt) :** Montrer que, dans tout espace vectoriel E, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels munis respectivement des bases $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ et $\mathcal{G} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_p)$, alors :
$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} \text{ est une famille libre} \Rightarrow F \cap G = \{\vec{0}\}$$
4. En déduire un sous-espace vectoriel G tel que $F \oplus G = \mathcal{P}_3$.

Correction.

1.
   - Le polynôme nul appartient bien à F donc $F \neq \emptyset$.
   - Soit p et $q \in F$, $(p+q)'' = p'' + q'' = 0 + 0 = 0$ donc $p + q \in F$.
   - Soit $p \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda p)'' = \lambda p'' = \lambda.0 = 0$ donc $\lambda p \in F$.
2.
$$\begin{aligned}
p \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 \\ p'' = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 \\ 2a_2p_0 + 6a_3p_1 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 \\ a_2 = a_3 = 0 \quad \text{car } (p_0, p_1) \text{ est libre (sous-famille d'une famille libre)} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad p = a_0p_0 + a_1p_1
\end{aligned}$$

   p_0 et $p_1 \in F$ donc $F = \text{vect} < p_0, p_1 >$. De plus, (p_0, p_1) est une famille libre, c'est donc une base de F.
3. Montrons que tout vecteur de $F \cap G$ est nul :
$$\begin{aligned}
\vec{x} \in F \cap G \Leftrightarrow \; &\vec{x} = \lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{f}_n \text{ et } \vec{x} = \mu_1\vec{g}_1 + \ldots + \mu_p\vec{g}_p \\
\Rightarrow \; &\lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{f}_n = \mu_1\vec{g}_1 + \ldots + \mu_p\vec{g}_p \\
\Rightarrow \; &\lambda_1\vec{f}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{f}_n - \mu_1\vec{g}_1 - \ldots - \mu_p\vec{g}_p = \vec{0} \\
\Rightarrow \; &\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu_1 = \ldots = \mu_p = 0 \text{ (car } \mathcal{F} \cup \mathcal{G} \text{ est une famille libre)} \\
\Rightarrow \; &\vec{x} = 0.
\end{aligned}$$
4. Soit $G = \text{vect} < p_2, p_3 >$.
   On a bien l'union des bases de F et G qui est libre (c'est la base canonique), donc $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
   De plus, $\dim F + \dim G = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{P}_3$, d'où $F \oplus G = \mathcal{P}_3$.

Exercice 2 On considère E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u : E \to F$ une application linéaire.

1. Rappeler la définition d'une application linéaire ainsi que la définition du noyau de u.
2. Montrer que si u est injective alors $\mathrm{Ker}\,(u) = \{\vec{0}_E\}$.
3. Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que si u est injective alors $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \ldots, u(\vec{e}_n))$ est une famille libre de F.

Correction.

1. u est une application linéaire si
   — pour tout x et $y \in E$ alors $u(x+y) = u(x) + u(y)$,
   — pour tout $x \in E$ et $\lambda \in K$ alors $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.
   Le noyau de u est donné par
   $$\mathrm{Ker}\,(u) = \{x \in E \,:\, u(x) = 0_F\}.$$
2. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$ quelconque. On a
   $$u(x) = 0_F = u(0_E).$$
   Or u est injective donc $x = 0_E$.
3. On considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ vérifiant l'égalité
   $$\lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_n u(e_n) = 0_F.$$
   Comme u est linéaire alors
   $$0_F = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_n u(e_n) = u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n).$$
   On en déduit que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in \mathrm{Ker}\,(u) = \{0_E\}$, c'est-à-dire
   $$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0_E.$$
   Or la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre donc nécessairement on a $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Ainsi $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre de F.

Exercice 3 Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} u$.
3. Déterminer $\operatorname{Im} u$.
4. u est-elle injective ? surjective ? bijective ?
5. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (à savoir $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$). Ecrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (on expliquera comment elle est construite).

Correction.

1. Pour tout x et $y \in E$ on a

$$\begin{aligned} u(x_1 + y_1, x_2 + y_2) &= (2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)) \\ &= (2x_1 + x_2, x_1 - x_2) + (2y_1 + y_2, y_1 - y_2) = u(x_1, x_2) + u(y_1, y_2). \end{aligned}$$

   De plus, pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$u(\lambda x_1, \lambda x_2) = (2(\lambda x_1) + (\lambda x_2), (\lambda x_1) - (\lambda x_2)) = \lambda(2x_2 + x_2, x_1 - x_2) = \lambda u(x_1, x_2).$$

   Donc u est bien une application linéaire.

2. On a les équivalences suivantes :

$$x \in \operatorname{Ker}(u) \Leftrightarrow u(x) = (0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 & = 0, \\ x_1 - x_2 & = 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 3x_1 & = 0, \\ x_1 & = x_2, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = 0, \\ x_2 & = 0. \end{array} \right.$$

   Donc $\operatorname{Ker}(u) = \{(0, 0)\}$.

3. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Im}(u) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y = u(x) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 & = y_1, \\ x_1 - x_2 & = y_2, \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = \dfrac{y_1 + y_2}{3}, \\ x_2 & = \dfrac{y_1 + y_2}{3} - y_2, \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = \dfrac{y_1 + y_2}{3}, \\ x_2 & = \dfrac{y_1 - 2y_2}{3}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

   Cette suite d'équivalences montrent que $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^2$.

4. D'après le cours, u est bijective ssi $\operatorname{Ker}(u) = \{(0, 0)\}$ et $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}^2$. Ainsi on déduit directement des questions précédentes que u est bijective (l'équivalence en dimension finie : u bijective ssi u injective ssi u surjective, ne figure pas au programme du test 1).

5. Pour déterminer A on s'intéresse à

$$u(e_1) = u(1, 0) = (2, 1) = 2e_1 + 1e_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = u(0, 1) = (1, -1) = 1e_1 - 1e_2.$$

   On obtient alors

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} u(e_1) & u(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$$